الرياضيات الاقتصادية

الأستاذ: شمعون شمعون

الرياضيات الاقتصادية

الطبعة الثالثة

ديوان المطبوعات الجامعية

الساحة المركزية - بن عكنون - الجزائر

رقم النشر : 4.01.3105
رقم ر.د.م.ك (ISBN): 9961.0.0803.0
رقم الإيداع القانوني : 2004/3083

الفهـــرس

الباب الأول
القسم النظري

الباب الثاني
القسم التطبيقي

مقدمة

يشكل موضوع هذا الكتاب أحد المقررات الحديثة التي تدرس في معاهد العلوم الاقتصادية. فبعد أن كان الاقتصاد يعتمد على النواحي الوصفية، تطور هذا العلم بفضل استخدام الطرق الرياضية والاحصائية تطورا ملحوظا، وبرزت مقررات جديدة كالاقتصاد القياسي تعتمد اعتمدا كليا على الرياضيات. ومن هنا يبرز الدور الهام لهذا الموضوع الذي يشكل حجر الزاوية للاقتصاد الكمي.

إن ما دفعني إلى وضع كتاب الرياضيات الاقتصادية هو ندرة هذا النوع من الكتب العربية. هذا الكتاب موجه إلى طلبة معاهد العلوم الاقتصادية والسياسية والتجارة والادارة، وكذلك إلى الباحثين المهتمين بهذا النوع من الدراسات. ولقد قمت بتدريس هذا المقرر منذ عام 1980 عندما أنشئت الدراسات العليا باللغة العربية في جامعة الجزائر.

ينقسم هذا الكتاب إلى بابين رئيسيين:

الباب الأول: القسم النظري البحت. يعالج الأدوات الرياضية الأساسية لفهم الظواهر الاقتصادية. يشمل هذا الباب المواضيع التالية: المحددات، المصفوفات، التفاضل، التكامل، دراسة الدالات، المتواليات. هذه المواضيع تشكل برنامج مادة الرياضيات السنة الأولى علوم اقتصادية.

<u>الباب الثاني</u>: يتناول الجانب التطبيقي للرياضيات في الميدان الاقتصادي وخاصة في الاقتصاد الجزئي ويشمل المواضيع التالية: مفهوم المرونة، توازن المستهلك، توازن المنتج، توازن السوق، فائض المنتج والمستهلك وتقييم المشاريع.

هذا الباب يشكل بوجه عام برنامج السنة الثانية للعلوم الاقتصادية.

ولقد أضفت فصلا هاما يتعلق بالمثلوية ويعالج ثلاث مواضيع رئيسية وهي: البرمجة الخطية، اتخاذ القرارات الاقتصادية ونظرية المباراة. أما الفصل الثاني فيتعلق بتقييم المشاريع. هذه المواضيع مخصصة لطلبة السنة الثالثة والرابعة والدراسات العليا.

ولقد زودت الكتاب بمسائل محلولة تم انتقاؤها من مراجع أجنبية متعددة. وهي تمارين تطبيقية تساعد الطالب على تفهم هذه المادة واستيعابها بشكل جيد.

لقد عالجت مواضيع هذا الكتاب بأسلوب مبسط يسهل على الطلبة من مختلف المستويات والمعاهد على فهمها.

لقد أعيد طبع هذا الكتاب ثلاث مرات وكان لا بد من إعادة النظر في صياغته من جديد وخاصة أن الطبعة الأولى ظهرت عام 1990. لقد حذفت من القسم الأول النظري بعض الفصول وجدت أنها ليست بالضرورية

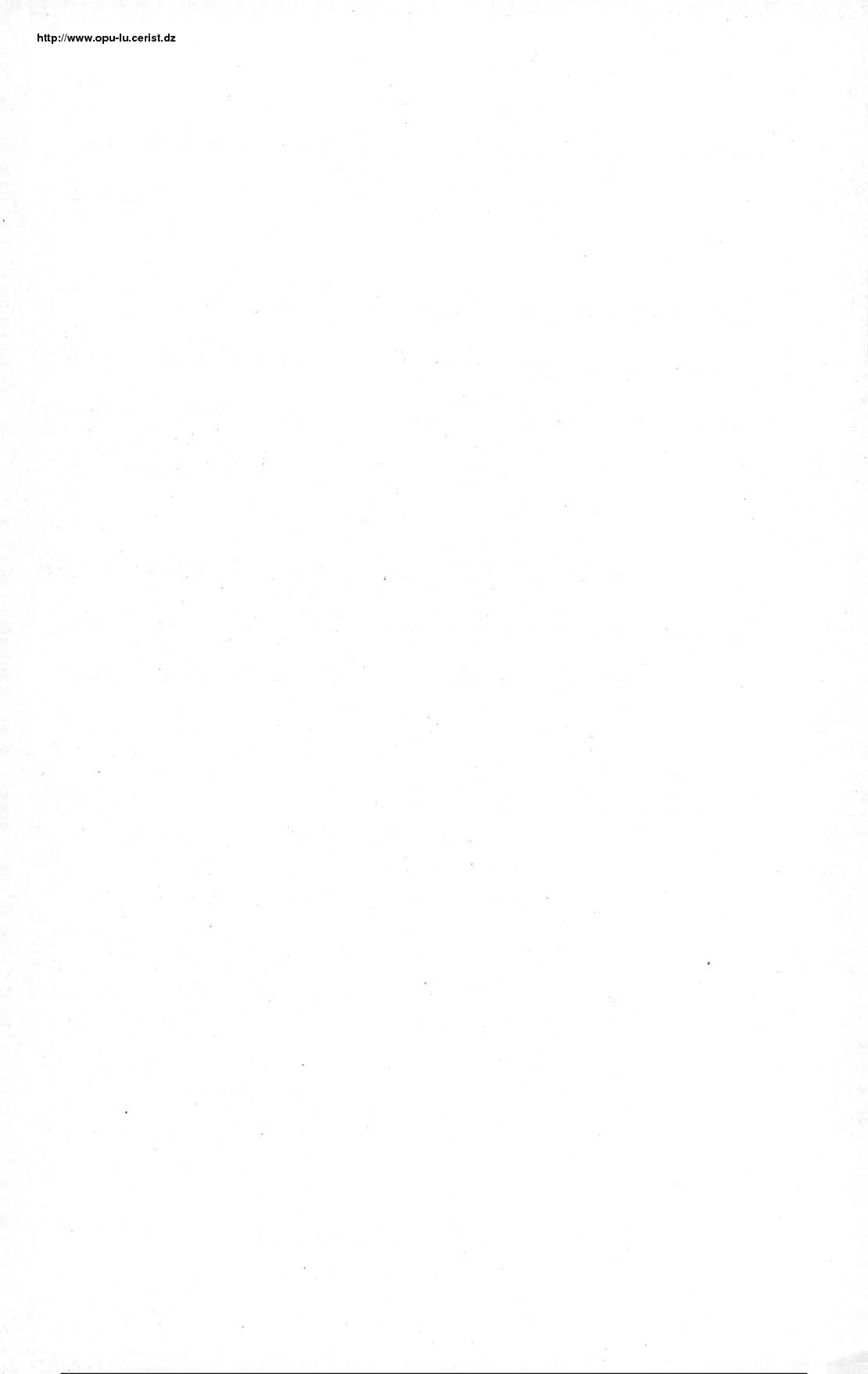
وتتعلق بنظرية المجموعات والتحليل المزجي والأشعة ونشر التوابع والمعادلات التفاضلية

أما في القسم التطبيقي فلقد أضفت إليه بعض الفصول مثلا جدول ليونتيف وكذلك فصل خاص بتخفيض العملة وفصل آخر يتعلق بعمليات البورصة والتي تتطلب بعض المعلومات البسيطة في الرياضيات. ولقد أثرينا هذا القسم بتمارين جديدة.

إن كتابي هذا ككل مجهود علمي لا يخلو من الهفوات وإنه ليسرني أعظم السرور أن يتفضل زملائي بموافاتي بآرائهم وملاحظاتهم القيمة كي اتخذها أساسا عند إعادة طبعة الكتاب في المستقبل والله ولي التوفيق.

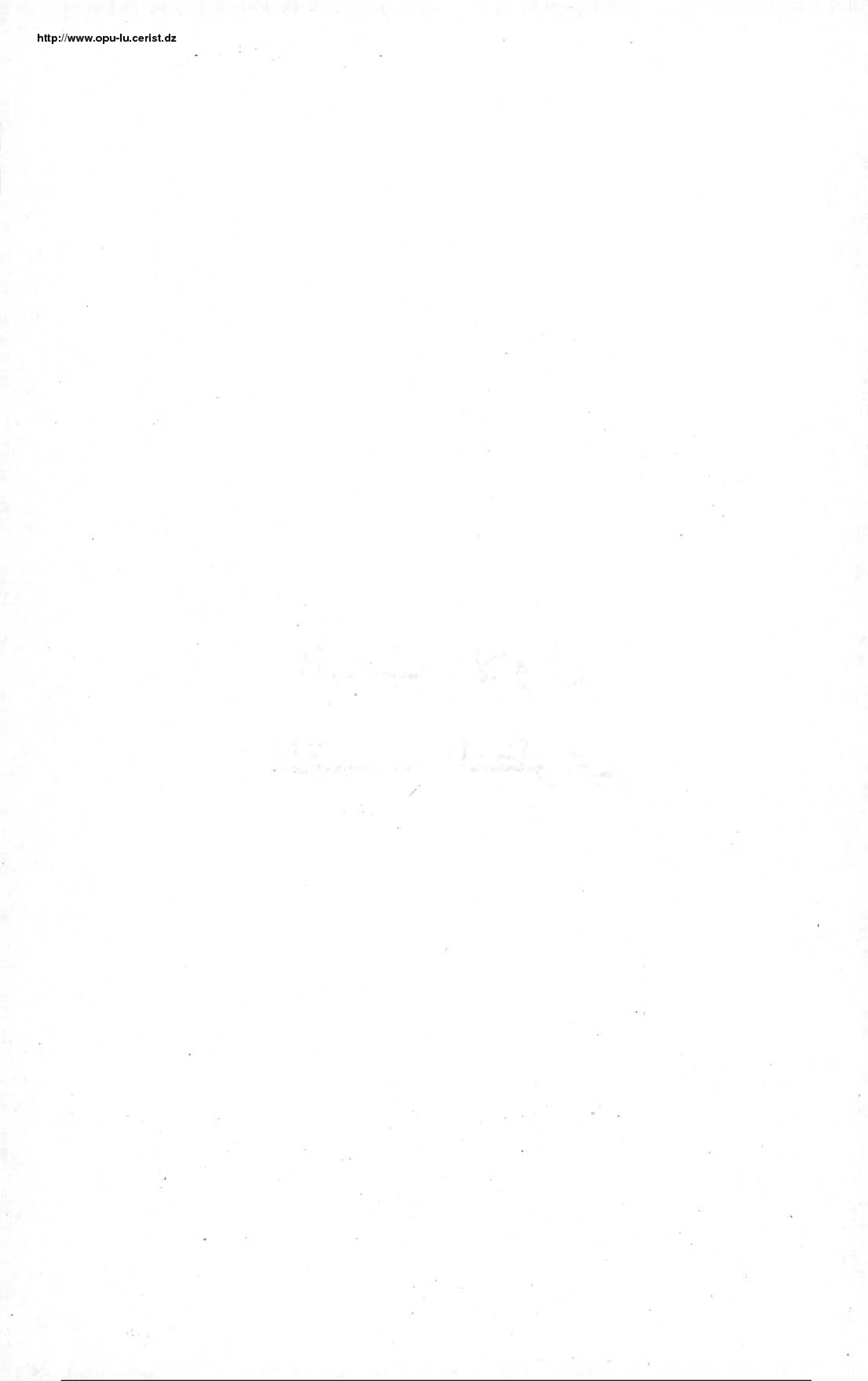
الجزائر في أول جوان 2004

المؤلف د. شمعون



الباب الأول

القسم النظري



الفصل الأول

المحددات

تحديدها: هي عبارة عن أدوات رياضية تسمح لنا بحل عدة معادلات لعدة مجاهيل.

نبدأ بحل جملة معادلتين لمجهولين

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

بحيث أن $(a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2)$ هي ثوابت. نحل ذلك بالطريقة الكلاسيكية.

نضرب طرفي المعادلة الأولى (b_2) وطرفي المعادلة الثانية $(-b_1)$ ونجمع.

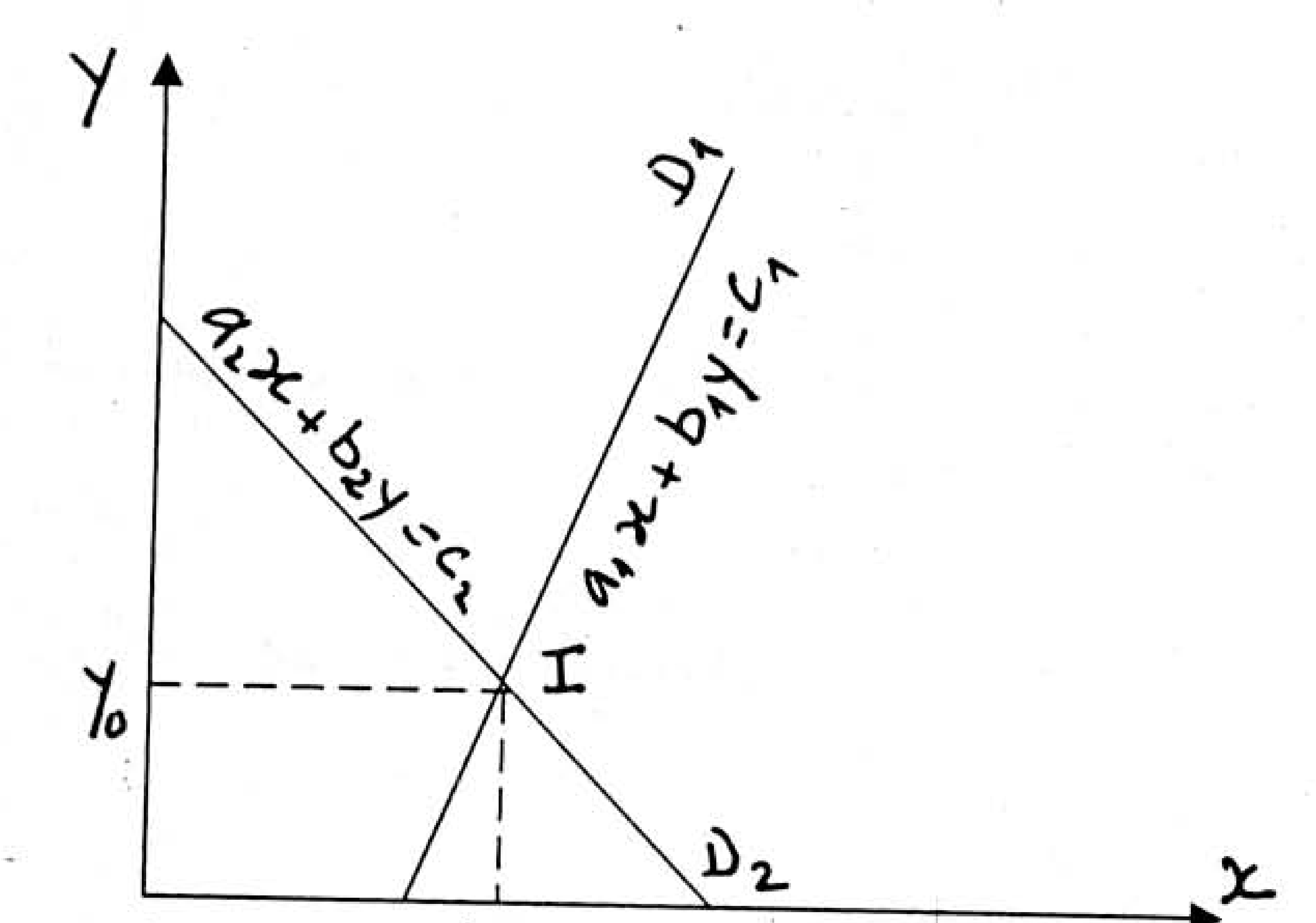
$$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2$$
$$-a_2 b_1 x - b_1 b_2 y = -c_2 b_1$$
$$\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)x = \left(c_1 b_2 - c_2 b_1\right)$$
$$\Rightarrow x_0 = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

وإذا ضربنا طرفي المعادلة الأولى $(-a_2)$ وطرفي المعادلة الثانية (a_1) وجمعنا، نحصل على:

$$-a_1 a_2 x - b_1 a_2 y = -c_1 a_2$$
$$a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = c_2 a_1$$
$$\left(a_1 b_2 - b_1 a_2\right)y = \left(a_1 c_2 - c_1 a_2\right)$$
$$\Rightarrow y_0 = \frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

نفترض أن المقدار $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$

الخطوط البيانية



إن المعادلتين:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

يمكن تمثيلهما بيانيا

بمستقيمين هما: D_1 وD_2

ميلاهما على الترتيب

$-\frac{a_1}{a_2}$ و $-\frac{a_2}{b_2}$

إذا كان هذان الميلان غير متساويين، فالمستقيمان يتقاطعان في النقطة I. تقع على كلا المستقيمين، وتحقق احداثياتها جملة المعادلتين المفروضتين. ينتج عن ذلك أن البحث عن قيم x و y التي تحقق المعادلتين بآن واحد يعني بالضبط البحث عن احداثيات نقطة تقاطع المستقيمين D_1 وD_2، اللذين يمثلان بيانيا جملة المعادلتين المفروضتين.

إن عدم تساوي ميلي المستقيمين يكتب رياضيا:

$$-\frac{a_2}{b_2} \neq -\frac{a_1}{b_1} \Rightarrow a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$$

وهو نفس الشرط الذي وجدناه جبريا، والذي يجب أن يتحقق ليكون لجملة المعادلتين حلا وحيدا.

إذا كان ميلا المستقيمين D_1 وD_2 متساويين فالمستقيمان يكونان متوازيين أو منطبقين وذلك حسب قيم C_1 وC_2 : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

في هذه الحال ينطبق المستقيمان D_1 وD_2.

$$A \begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \\ b_1c_2 - b_2c_1 = 0 \\ a_1c_2 - a_2c_1 = 0 \end{cases}$$

هناك إذن ما لا نهاية من الحلول

$$B \begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \\ a_1c_2 - a_2c_1 = 0 \\ b_1c_2 - b_2c_1 = 0 \end{cases}$$

في هذه الحال يتوازى المستقيمان D_1 وD_2

إذن لا يوجد حل.

المحدد من المرتبة الثانية

رأينا أن جملة المعادلتين $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$ تقبل حلا وحيدا عندما $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$، هذا الحل هو:

$$x_0 = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ ، } y_0 = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

إن الرمز || يساوي

إذن بتكون المحدد من المرتبة الثانية من أربعة عناصر مصفوفة على سطرين وعمودين تساوي قيمة جداء العنصرين المؤلفين للقطر الأول الهابط من الأعلى واليسار إلى الأسفل واليمين.

مطروحا من جداء العنصرين المؤلفين للقطر الثاني الهابط من اليمين إلى اليسار ومن الأعلى إلى الأسفل.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

خواص المحددات

1- إذا ضربت عناصر أحد السطرين أو العمودين بعدد ما k فإن فيمة المحدد تضرب بهذا العدد.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k(a_1b_2 - a_2b_1)$$

2- تتغير إشارة المحدد إذا تبادل فيه سطرين أو عمودين.

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1) = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

3- لا تتغير قيمة المحدد إذاً بادلنا فيه الأسطر بالأعمدة والعكس بالعكس مع المحافظة على الترتيب.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1)$$

4- إذا تساوت أو تناسبت عناصر سطرين أو عمودين في محدد ما، فالمحدد يساوي الصفر.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 \\ ka_1 & kb_1 \end{vmatrix} = 0$$

5- إذا كان كل عنصر في أحد الأسطر أو أحد الأعمدة عبارة عن مجموع حدين، فالمحدد يتألف من مجموع محددين.

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_3 & b_1 + b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

المحدد من المرتبة الثالثة

هو كل محدد يكتب على الشكل التالي:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

نرمز بـــ $a_{i,J}$ للعنصر الموجود في السطر i وفي العمود J

في مثلنا هذا $a_{22} = b_2 \quad a_{31} = c_3 a_{13} = c_1$

نرمز بـــ Aij إلى المعين الصغير أو المحيدد (i+j) من الرتبة (n-1) الموافق للعنصر $a_{i,J}$ وهو بالتعريف حاصر ضرب (-1) بالمحدد الناتج من المحيدد الأصلي بعد حذف السطر i والعمود J.

في مثلنا $A_{ij} = (-1)^{(1+3)}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = +(a_2 b_3 - a_3\ b_2)$

أما قيمة المحدد من الرتبة الثالثة فتحسب بالنشر، أما وفق سطر أو عمود نختاره ونحصل على النتيجة:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$(a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) - (b_1 a_2 c_3 + a_1 c_2 b_3 + c_1 b_2 a_3)$$

يمكن التوصل إلى هذه النتيجة بواسطة قاعدة الإقطار وتتلخص في أن نكتب عناصر المحدد كما هي، ثم نطبق على يمين العمود الثالث عناصر العمود الأول والثاني كما هو مبين أدناه. نرسم الأقطار الرئيسية الثلاثة الأولى للشكل الحاصل وهي الأقطار النازلة من الأعلى إلى الأسفل ومن اليسار إلى اليمين ثم .

نرسم الأقطار الثلاثة الأخرى المناظرة وهي الأقطار النازلة من الأعلى إلى الأسفل ومن اليمين إلى اليسار. نضرب عناصر كل قطر بعضها ببعض ونضع أمامها إشارة (+) أو (−) حسبما يكون القطر الرئيسي أو المناظر له ونحصل على نفس النتيجة.

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{matrix}$$

هذه الطريقة تدعى بطريقة ساروس Sarrus

$$+\left(a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3\right)$$
$$-\left(b_1a_2c_3+a_1c_2b_3+c_1b_2a_3\right)$$

تطبيق عملي

1 - لدينا جملة المعادلتين لمجهولين $\begin{cases} 3x+5y=19 \\ 6x-7y=4 \end{cases}$

الحل

نحسب قيمة المحددات الثلاث التالية:

المخرج المشترك = −51 صورة المجهول x =−153، إذن قيمة المجهول $x = -\frac{153}{51-} = 3$.

قيمة المجهول $y = -\frac{102}{51-} = -2$.

2- حل جملة المعادلات التالية:

$$x + 4y + 3z = 1$$
$$2x + 5y + 4z = 4$$
$$x - 3y - 2z = 5$$

الحل

نحسب المحددات الأربع التالية:

المخرج المشترك DC $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$ صورة y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2$

صورة المجهول x $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$ صورة z $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$

قيمة المجاهيل: $x = 3$, $y = -2$, $z = 2$

3- شخصان يسألان عن أعمارهما، يقول الكبير للصغير، عمري الآن هو ضعف عمرك عندما كنت في سنك. أجاب الصغير: عندما أصبح في عمرك الآن سوف يصبح مجموع أعمارنا 63 عاما.

<u>السؤال</u>: ما هو عمر كل شخص؟

الحل

نفترض x سنة عمر الكبير، y سنة عمر الصغير، الفارق في الأعمار هو دائما $(x - y)$ سنة.

المعادلة الأولى حسب النص: $x = 2[y - (x - y)]$

المعادلة الثانية: $x + x + (x - y) = 63$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين $\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 3x - y = 63 \end{cases}$

نحل ذلك بطريقة المحددات:

المخرج المشترك $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 9$ صورة x $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 63 & -1 \end{vmatrix} = 252$

صورة y $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 63 \end{vmatrix} = 189$ ومنها نحصل على:

عمر الكبير: x=28 سنة $= \frac{252}{9}$

عمر الصغير: y=21 سنة $= \frac{189}{9}$

4- لدينا دوال العرض والطلب على ثلاث سلع وهي:

العرض	الطلب
$Q_A^0 = 6p_a$	$Q_D^A = 30 - 4p_a + p_b + 2p_c$
$Q_B^0 = 10p - 20$	$Q_D^B = 40 + 3p_a - 2p_b$
$Q_C^0 = 20p_c^b - 4$	$Q_D^c = 20 - 5p_a - 2p_c$

السؤال: أحسب أسعار وكميات التوازن؟

الحل

يتحدد سعر التوازن عند تعادل العرض والطلب.

$$Q_D^A = Q_0^A = 30 - 4p_a + p_b + 2p_c = 6p_a$$
$$Q_D^B = Q_0^B = 40 + 3p_a - 2p_b = 10p - 20$$
$$Q_D^c = Q_0^C = 20 - 5p_a - 2p_c = 20p_c^b - 4$$

نحسب المحددات الأربع التالية:

$$\text{صورة } p_a = 9816 = \begin{vmatrix} 30 & -1 & -2 \\ 30 & 12 & 0 \\ 30 & 0 & -22 \end{vmatrix} \text{ المخرج المشترك } 2454 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & -2 \\ -3 & 12 & 0 \\ -5 & 0 & -22 \end{vmatrix}$$

$$\text{صورة } p_c = 4908 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 30 \\ -3 & 12 & 60 \\ -5 & 0 & 24 \end{vmatrix} \text{ صورة } p_b = 14724 = \begin{vmatrix} 10 & 30 & -2 \\ -3 & 60 & 0 \\ -5 & 24 & 22 \end{vmatrix}$$

وهكذا نحصل على أسعار وكميات التوازن للسلع الثلاث.

$$p_a = 4 \quad p_b = 6 \quad p_c = 2$$

$$q_a = 24 \quad q_b = 40 \quad q_c = 36$$

5- حل المعادلة التالية:

$$\begin{vmatrix} (15-2x) & 11 & 10 \\ (11-3x) & 17 & 16 \\ (7-\ x) & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

نحلها بنشر العمود الأول.

$$(15-2x)\begin{vmatrix} 17 & 16 \\ 14 & 13 \end{vmatrix} - (11-3x)\begin{vmatrix} 11 & 10 \\ 14 & 13 \end{vmatrix} + (7-x)\begin{vmatrix} 11 & 10 \\ 17 & 16 \end{vmatrix} = 9x-36=0 \Rightarrow x=4$$

6- احسب قيمة المجهول t في المحدد بحيث تصبح قيمة المحدد تساوي0.

$$\begin{vmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix} = 0$$

الحل

$$(t-5)(t+3)+7=0 \qquad t^2-2t-8=0$$

$$\Delta = 1+8=9 \qquad t_1 = 4 \quad t_2 = -2$$

7- برهن على أن المقدار التالي يساوي الصفر

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \\ 8 & 5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = 0 \quad B = 0 \quad C = (-2) \quad D = (+2)$$

8- يلعب ثلاثة أشخاص اللعبة التالية: لدى كل شخص مبلغ معين يختلف عن مبلغ الآخرين. في كل لعبة يخسر أحد اللاعبين بالدور. كلما خسر لاعب عليه أن يدفع للاعبين الآخرين نفس المبلغ الذي يمتلكانه. في هذه اللعبة يخسر كل لاعب مرة واحدة فقط. وفي الأخير بعد ثلاث جولات، يتوقف اللعب ويفترق اللاعبون وفي جيب كل واحد منهم نفس المبلغ 36دج.

السؤال: ما هو المبلغ الذي كان في حوزة كل لاعب قبل اللعب؟

الحل

نفترض x, y, z مقدار المبالغ لدى اللاعبين. نفترض أن اللاعب الأول يخسر اللعبة الأولى. تصبح المبالغ لدى كل لاعب بعد اللعبة الأول كالتالي:

$$(x-y-z),\ 2y,\ 2z$$

بعد اللعبة الثانية نفترض أن اللاعب الثاني يخسر ونحصل على:

$$2(x-y-z),\ (2y-x-z),\ 4z$$

بعد اللعبة الثالثة نفترض أن اللاعب الثالث يخسر ونحصل على:

$$4(x-y-z),\ 2(3y-x-z),\ (7z-x-y)$$

نحن نعلم أن هذه الكميات الثلاث متساوية للمقدار 36دج.

نحن إذن أمام جملة ثلاث معادلات لثلاث مجاهيل.

$$\begin{cases} 4x-4y-4z=36 & = 58{,}5 \text{ دج} \\ 6y-2x-2z=36 & = 31{,}5 \text{ دج} \\ 7z-x-y=36 & = 18 \text{ دج} \end{cases}$$

لنتأكد من صحة الأجوبة

	z	y	x
بعد اللعبة الأولى	36	63	9
بعد اللعبة الثانية	72	18	18
بعد اللعبة الثالثة	36	36	36

9- احسب قيمة المحدد

ننشر المحدد حسب العمود الأخير فنحصل على

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = \left(b^2c-bc^2\right)-\left(a^2c-ac^2\right)+\left(a^2b-ab^2\right)=$$

$$bc(b-c)-ac-(a-c)+ab(a-b)=(a-b)(b-c)(c-a)$$

10- برهن على أن:

$$\begin{vmatrix} a & a+r & a+2r \\ a+3r & a+4r & a+5r \\ a+6r & a+7r & a+8r \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} (a-b-c) & 2a & 2a \\ 2c & (b-c-a) & 2b \\ 2c & 2c & (c-a-b) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

11- لدينا مجموعة المعادلات التالية:

حل بطريقة المحددات
$$\begin{cases} -x-2y+z=5 \\ 2x+y-2z=-1 \\ -3x+z=0 \end{cases}$$

<u>الجواب</u>

$$\left\{z=-\frac{3}{2}-, \quad y=-3, \quad x=-\frac{1}{2}\right\}$$

الفصل الثاني

المصفوفات

تحديدها: هي مجموعة عناصر موزعة على شكل جدول يتكون من أعمدة وصفوف. نرمز للمصفوفة بالرمز $A_{(m,n)}$ بحيث أن m تمثل عدد الأسطر، n تمثل عدد الأعمدة. إذا كانت $m \neq n$ دعيت المصفوفة مستطيلة. وإذا كانت $m = n$ دعيت المصفوفة مربعة. وإذا كانت $m = 1$ دعيت المصفوفة سطر. وإذا كانت $n = 1$ دعيت المصفوفة عمود.

المصفوفات الشهيرة

1- المصفوفة القطرية.

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها معدومة ماعدا العناصر الواقعة على القطر الرئيسي فيها. مثال: المصفوفة A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2- المصفوفة المتناظرة.

هي مصفوفة مربعة، العناصر المتناظرة فيها بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية. مثال: المصفوفة B.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 8 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

3- المصفوفة الأحادية.

هي مصفوفة قطرية، عناصر قطرها الرئيسي تساوي جميعها الواحد. مثال المصفوفة C.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4- المصفوفة الصفرية.

هي مصفوفة جميع عناصرها معدومة ويرمز لها [0]

5- المصفوفة الشاذة.

هي مصفوفة مربعة محددها يساوي الصفر

6- المصفوفة النظامية.

هي مصفوفة مربعة محددها لا يساوي الصفر.

7- منقول المصفوفة.

هي المصفوفة التي نحصل عليها بوضع اسطرها أعمدة، والعكس بالعكس.

مثال: منقول المصفوفة H هي المصفوفة ´H.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$H' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

ملاحظة.

منقول المصفوفة المستطيلة من المرتبة $A_{(m,n)}$ هي المصفوفة المستطيلة من المرتبة $A_{(n,m)}$.

منقول منقول المصفوفة A هي ذاتها.

إذا كانت المصفوفة A متناظرة فمنقول المصفوفة هي ذاتها.

8- المصفوفة المثلثة.

هي المصفوفة M المربعة جميع عناصرها $a_{ij} = 0$. فإذا كانت $i > j$ سميت بمصفوفة مثلثة إلى أعلى. وفي حالة العكس $j > i$ سميت بمصفوفة مثلثة إلى أسفل. وإذا كانت بنفس الوقت مصفوفة مثلثة إلى أعلى وإلى أسفل فهي مصفوفة قطرية.

مثال:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & e & f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

مصفوفة قطرية   إلى أسفل   إلى أعلى

9- المصفوفة المساعدة.

هي المصفوفة التي نحصل عليها إذا أخذنا كل عنصر من المجموعة وحسبنا المعين الصغير المقابل له. لحساب هذا المعين الصغير تأخذ العنصر ونحذف السطر والعمود المقابل له ونطبق قانون الإشارة.

مثال: المصفوفة K والمصفوفة المساعدة 'K.

$$K' = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 6 & -9 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

العمليات على المصفوفات

1- التساوي: يقال عن مصفوفتين بأنها متساويتان فيما إذا كانت عناصرهما المتقابلة متساوية. مثال:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 1 \quad d = 2 \quad c = 3 \quad d = 4$$

2- الجمع: يقال عن المصفوفة C بأنها تشكل مجموع المصفوفتين A وB إذا كانت المصفوفات الثلاث من نفس المرتبة. مثال:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -5 & 0\\ 2 & 4 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 0 & -3\end{bmatrix}+B\begin{bmatrix}1 & -4 & 3 & 2\\ -1 & 4 & 5 & 2\\ -2 & 3 & -1 & 0\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}3 & -3 & -2 & 2\\ 1 & 8 & 8 & 4\\ -3 & 5 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

خواص جمع المصفوفات

- جمع مصفوفتين عملية تبديلية
- جمع عدة مصفوفات عملية تجميعية

3- الطرح: يقال من المصفوفة C بأنها حاصل طرح لمصفوفتين A وB إذا كانت من نفس الرتبة C=A-B.

إذا أضفنا الصفرية إلى أية مصفوفة نحصل على نفس المصفوفة. هذا يعني أن المصفوفة الصفرية تتمتع بنفس الخواص التي يتمتع بها الصفر في الجمع الجبري.

4- الضرب: ضرب مصفوفة بعدد λ هو مصفوفة أخرى تنتج عناصرها من عناصر المصفوفة A بعد ضربها بالعدد λ. مثال:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 5\end{bmatrix}\quad \lambda=-3\qquad A'=\lambda.A=\begin{bmatrix}-9 & -3 & 6\\ 3 & 0 & -15\end{bmatrix}$$

5- ضرب مصفوفتين: أن حاصل ضرب المصفوفة $A_{(m,n)}$ بالمصفوفة $B_{(n,p)}$ هي المصفوفة $C_{(m,p)}$. يفترض في عملية الضرب أن تكون أعمدة المصفوفة A تساوي عدد اسطر المصفوفة B، في مثلنا هذا تساوي n. مثال:

$$A_{(3,2)}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}\times B_{(2,4)}\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 5\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}=C_{(3,4)}\begin{bmatrix}7 & 1 & 1 & 5\\ 7 & 12 & 5 & 10\\ 19 & 1 & 1 & 20\end{bmatrix}$$

خواص جداء المصفوفات

- جداء المصفوفات عملية غير تبديلية $A\times B\neq B\times A$
- جداء المصفوفات عملية تجميعية $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$
- جداء المصفوفات عملية توزيعية بالنسبة للجمع أي: $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$

5- منقول جداء مصفوفتين يساوي جداء منقوليهما مع عكس الترتيب أي أن $(A\times B)=B'\times A'$.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\\4&5\\1&2\end{bmatrix}\times B=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&4&5\end{bmatrix}=A\times B=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&10&21\\8&24&3\\2&7&13\end{bmatrix}$$

$$A'=\begin{bmatrix}1&2&4&1\\0&3&5&2\end{bmatrix}\times B'=\begin{bmatrix}2&0\\1&4\\3&5\end{bmatrix}=(A\times B)'=\begin{bmatrix}2&4&8&2\\1&10&24&7\\3&21&3&13\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $(B'\times A')=(A\times B)'$

مقلوب المصفوفة

تحديدها: مقلوب المصفوفة A إذا كانت نظامية هي المصفوفة A^{-1} بحيث أنها تحقق العلاقة التالية: $A.A^{-1}=I$ بحيث أن I تمثل المصفوفة الأحادية. لحساب مقلوب المصفوفة A هناك ثلاث طرق:

1- نحسب المصفوفة المساعدة ثم نحسب منقول هذه المصفوفة، أخيرا نقسم النتيجة على محدد المصفوفة.

مثال: لدينا المصفوفة نحسب المصفوفة المساعدة ثم نحسب منقول المصفوفة المساعدة ثم نحسب قيمة المحدد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$\Delta = -29$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 10 \\ 8 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\widetilde{A}} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 2 \\ 10 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

أخيرا نحصل على مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{\overline{\widetilde{A}}}{\Delta} = -\frac{1}{29}\begin{bmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 2 \\ 10 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

2- حسب هذه الطريقة، نجري تحويلات خطية على المصفوفة حتى تبرز المصفوفة الأحادية.

مثال: حل جملة المعادلات. نكتب المصفوفة ونضيف عمود رابع يتكون من القيم الثابتة الموجودة في الطرف الثاني، نحصل على المصفوفة A. نجري تحويلات خطية على هذه المصفوفة حتى تبرز المصفوفة الأحادية.

$$\begin{cases} 2x + 3z = 9 \\ x + 4y = 19 \\ y - z = 3 \end{cases}$$

لدينا إذن:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L_2(-1) + L_1, L_1(-1) + L_2$$

$$L_2\left(\frac{1}{8}\right), L_2(4) + L_1, L_2(-1) + L_3$$

$$L_3\left(\frac{-8}{5}\right), L_3\left(\frac{-3}{2}\right) + L_1, L_3\left(\frac{8}{3}\right) + L_2$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وهكذا نحصل على المصفوفة B.

نلاحظ أن المصفوفة B تتكون من المصفوفة الأحادية. أما الأعداد الموجودة في العمود الرابع فهي تمثل حلا لجملة المعادلات. إذن: $z=1$ $\quad y=4$ $\quad x=3$

3- تقتضي هذه الطريقة بإجراء تحويلات خطية بآن واحد على كل من المصفوفة A والمصفوفة الأحادية I حتى تنقلب A إلى مصفوفة أحادية. عندئذ تنقلب I إلى مقلوب المصفوفة A^{-1}.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}\ \begin{matrix}\xrightarrow{L_1(-2)+L_2}\\ \xrightarrow{L_1(-3)+L_3}\end{matrix}\ =\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&-1\\0&-1&-3\end{bmatrix}\ \begin{matrix}\xrightarrow{L_3(-1)+L_2}\\ \xrightarrow{L_3(2)+L_1}\end{matrix}\ =\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&2\\0&-1&-3\end{bmatrix}\ \begin{matrix}\xrightarrow{L_2+L_3}\\ \xrightarrow{L_3(-3)+L_1}\end{matrix}\ =\begin{bmatrix}-5&0&2\\1&1&-1\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&2\\0&0&-1\end{bmatrix}\ \begin{matrix}\xrightarrow{L_3(2)+L_2}\\ \xrightarrow{L_2(-1)}\end{matrix}\ =\begin{bmatrix}-5&0&2\\1&1&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}$$

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\-2&-1&0\end{bmatrix}$$

إذن مقلوب المصفوفة A هي المصفوفة A^{-1} وللتأكد من صحة الجواب يكفي أن نضرب المصفوفتين $A.A^{-1}=I$ علينا أن نحصل أن نحصل على المصفوفة الأحادية.

تطبيقات عملية

1- لدينا المصفوفات C,B,A.

احسب مربع هذه المصفوفات؟

الجواب

هذه المصفوفات الثلاث تساوي مربعها.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}=A^2$$

$$B=\begin{bmatrix} 7 & 21 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}=B^2$$

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}=C^2$$

2- لدينا المصفوفات C',B',A'.

احسب مربع هذه المصفوفات؟

الجواب

نلاحظ أن مربع هذه المصفوفات يساوي جداء المصفوفة بعدد ثابت. وهكذا نحصل على:

$$A'=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=A'^2=3A'$$

$$B'=\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=B'^2=5B'$$

$$C'=\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}=C'^2=10C'$$

3- احسب جداء المصفوفتين A وB:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}\times B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}=I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

النتيجة: جداء المصفوفتين يساوي المصفوفة الأحادية.

$$C=\begin{bmatrix}12 & 8\\ 30 & 20\\ -18 & -12\end{bmatrix}\times D=\begin{bmatrix}20 & 28\\ -30 & -42\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

النتيجة: جداء المصفوفتين يساوي المصفوفة الصفرية.

4- لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

- احسب جداء المصفوفتين. $A \times C = I$

الجواب: نحصل على المصفوفة الأحادية.

- برهن على أن: $(A+B)^2=2(A^2+B^2)$

الحل

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad B^2=\begin{bmatrix}1 & 2b\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad A^2+B^2=\begin{bmatrix}2 & 2(a+b)\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$(A+B)=\begin{bmatrix}2 & (a+b)\\ 0 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow (A+B)^2=\begin{bmatrix}4 & 4(a+b)\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$2(A^2+B^2)=\begin{bmatrix}4 & 4(a+b)\\ 0 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow (A+B)^2$$

5- لدينا المصفوفات التالية: C,B,A.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

اثبت صحة العلاقات التالية:

$$(A+B)' = A' + B'$$

$$(A \times B)' = A' \times B'$$

$$A \times (B + C) = AB + AC$$

الحل

$$(A+B)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)' = A' + B'\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad B'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A \times B) = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -12 \\ 6 & 3 & 9 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(A \times B)' = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -8 & 3 & -4 \\ -12 & 9 & -6 \end{bmatrix} = B' \times A'$$

$$B + C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 10 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A \times (+C) = \begin{bmatrix} 2 & -21 & -31 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & -21 & -34 \end{bmatrix}$$

$$A \times C = \begin{bmatrix} 6 - 13 - 19 \\ 2 - 17 - 28 \end{bmatrix} + A \times B = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -12 \\ 3 & 6 & 9 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A(B + C) = AC + AB = \begin{bmatrix} 2 & -21 & -31 \\ 5 & -7 & -8 \\ 9 & -21 & -34 \end{bmatrix}$$

6- لدينا المجموعة الاحصائية التالية معطاة بالجدول التالي:

الفئة	مركز الفئة	التكرار	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
من 0 إلى 2	1	N_1	n_1	n_1
من 2 إلى 4	3	5	15	45
من 4 إلى 6	5	6	30	150
من 6إلى 8	7	N_4	$7n_4$	$49n_4$
من 8 إلى 10	9	N_5	$9n_5$	$81n_5$
المجموع		$\sum n_i = 20$	$\sum n_i x_i = 94$	$\sum n_i x_i^2 = 556$

لدينا العناصر التالية:

التباين $5,71 = \sigma^2$. الوسط الحسابي $\overline{X} = 4,7$

مجموع التكرار $20 = \sum n_i$. احسب قيمة المجاهيل الثلاث: (n_1, n_4, n_5)

الحل

مجموع التكرار: $\sum n_i = n_1 + n_4 + n_5 + 11 = 20$

الوسط الحسابي: $\overline{X} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} \Rightarrow \sum n_i x_i = 94$

التباين $\sigma^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \overline{X} = 20\left[5,71 + (4,7)^2\right]$

وهكذا نحصل على جملة ثلاث معادلات لثلاث مجاهيل.

$$\begin{cases} n_1 + n_4 + n_5 = 20 - 11 = 9 \\ n_1 + 7n_4 + 9n_5 = 94 - 45 = 49 \\ n_1 + 49n_4 + 81n_5 = 556 - 195 = 361 \end{cases}$$

الجواب:

$$n_5 = 2, \quad n_4 = 4, \quad n_1 = 3$$

7- اقلب المصفوفة التالية: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

الحل

نجري التحويلات الخطية التالية:

$$L_1(-4)+L_3, L_1(-10)+L_2, L_3\left(\frac{1}{4}\right)+L_1, L_2\left(\frac{1}{7}\right), L_2(4)+L_3,$$

$$L_3\left(-\frac{7}{12}\right)+L_1, L_3\left(-\frac{5}{6}\right)+L_2, L_3\left(\frac{7}{6}\right) \Rightarrow$$

الجواب: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \\ 2 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$

الفصل الثالث

المشتقات

تحديدها: إذا كان لدينا الدالة $y = f(x)$ مستمرة ومحددة في المجال $[a,b]$ نسمي مشتق هذه الدالة ونرمز له بالرمز $y' = f'(x)$ النسبة ما بين تزايد التابع Δy وتزايد المتغير المستقل Δx عندما تتناهى هذه النسبة إلى الصفر:

$$y' = f'(x) = \text{نهاية } \frac{\Delta y}{\Delta x_{\to 0}}$$

حساب مشتق الدالة

لحساب مشتق دالة ما نتبع الخطوات التالية:

1- نعطي للمستقل المتغير x تزايد، ونرمز له Δx. ينتج عن ذلك تزايد للتابع المتغير ونرمز له Δy.

2- نحسب النسبة ما بين المتغيرين $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3- نحسب نهاية هذه النسبة عندما تتناهى $0 \to \Delta x$.

تطبيق عملي

احسب مشتق الدالة $y = x^2$

نتبع نفس الخطوات فنحصل على:

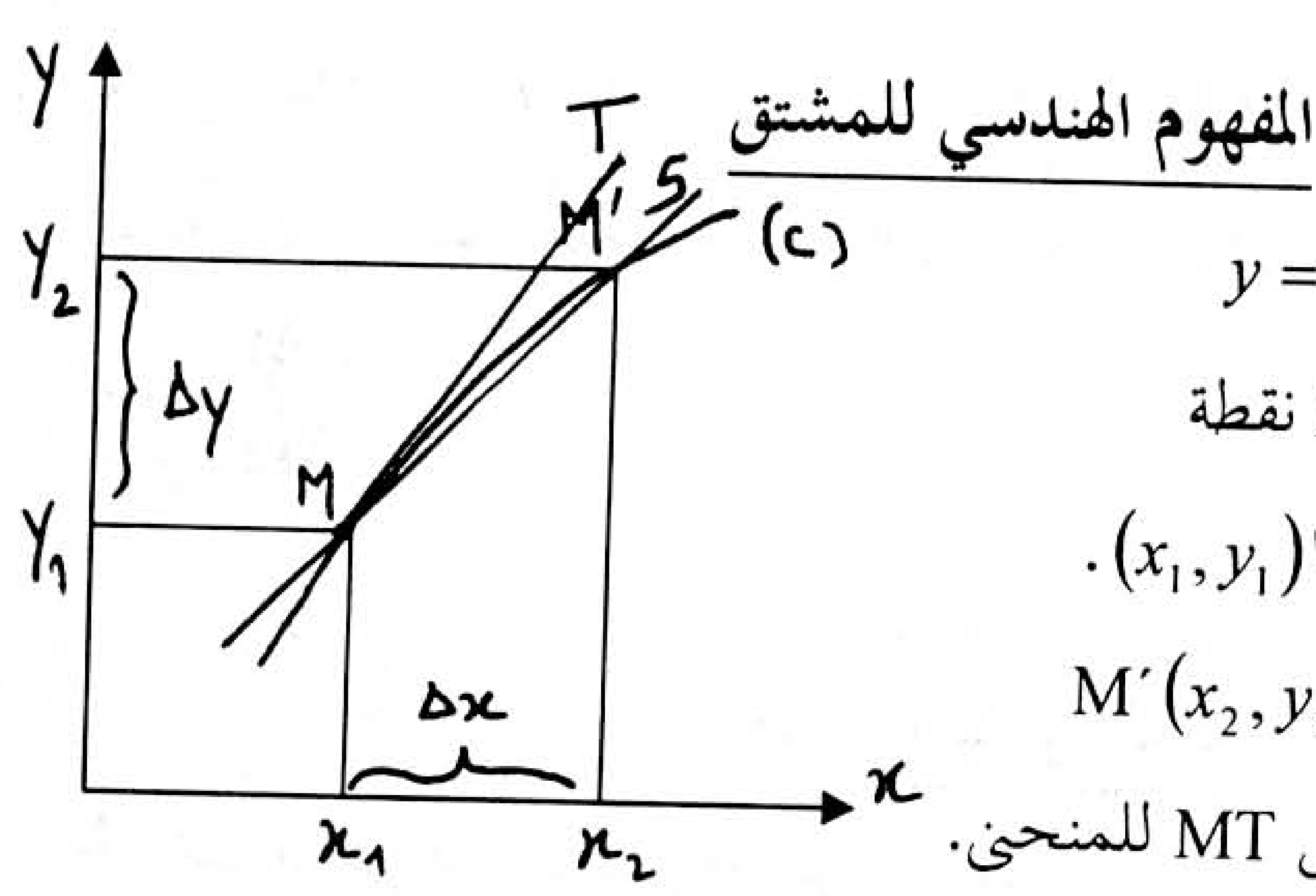
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

عندما تتناهى $\Delta x \to 0$ نهاية النسبة تساوي: $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$

إذن مشتق الدالة $y = x^2$ هو $y' = 2x$



المفهوم الهندسي للمشتق

لدينا منحنى الدالة: $y = f(x)$

ونرمز له ب(C) ولتكن M نقطة

من نقاط المنحنى احداثياتها (x_1, y_1).

لنتصور نقطة مجاورة لها $M'(x_2, y_2)$

نرسم القاطع MS والمماس MT للمنحنى.

نقول بأن المماس MT هو نهاية القاطع MS عندما تقترب النقطة ´M من النقطة M.

ميل القاطع: $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

نعتبر النقطة M ثابتة والنقطة ´M تتحرك باتجاه النقطة M.

هذه العملية تكافئ عملية اقتراب $\Delta x \to 0$. يدور القاطع MS حول النقطة M ويأخذ في الأخير الوضع MT وهو وضع المماس ويكون ميله مساويا α عندما $\Delta x \to 0$ ومنه التحديد التالي:

المشتق: هو المثل الزاوي لمماس الخط البياني للتابع في النقطة المفروضة M.

$\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

تطبيق عملي

1- أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = x^3 - 2x + 1$ في النقطة M احداثياتها هي: $(x_0 = 2, y_0 = 5)$.

الحل

معادلة المماس: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

نبدأ بحساب مشتق الدالة: $y' = 3x^2 - 2$

قيمة المشتق في النقطة M هي $f'_{(2)} = 10$

إذن معادلة المماس هي:

$$y - 5 = 10(x - 2)$$
$$y = 10x - 15$$

2- أوجد معادلة المماس عند النقطة A احداثياتها الواقعة على منحنى الدالة $y = x^2 - 1$ $A\begin{pmatrix} x_0 = 2 \\ y_0 = 3 \end{pmatrix}$

الحل

مشتق الدالة هو $y' = 2x$ ، قيمة المشتق في النقطة A: $y' = 4$

معادلة المماس:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y - 3 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 5$$

3- احسب معادلة المماس والناظم للمنحى $y - \sqrt{x}$ في النقطة A احداثياتها $(x_0 = 4, y_0 = 2)$.

الحل

نحسب مشتق الدالة: $y = \sqrt{x} \Leftarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ميل المماس في النقطة $x_0 = 4$ هو $y' = \frac{1}{4}$

معادلة المماس: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow x - 4y + 4 = 0$

معادلة الناظم: نحن نعلم بأن ميل المنحنيين جداءهما يساوي (1-) إذن ميل الناظم = (4-)

معادلة الناظم: $y - 2 = -4(x - 4) \Rightarrow y = 18 - 4x$

حساب مشتق الدوال الشهيرة

مشتق العدد الثابت = الصفر 0 $y = a \Rightarrow y' = 0$

مشتق المتحول المستقل=1 $y = x \Rightarrow y' = 1$

مشتق الدالة $y = ax \Rightarrow y' = a$

مشتق الدالة $y = x^n \Rightarrow y' = n \times^{n-1}$

مشتق الدالة $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$

مشتق الدالة $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

مشتق الدالة $y = \log x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$

مشتق الدالة $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

مشتق الدالة $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

مشتق الدالة $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

مشتق الدالة $y = tgx \Rightarrow y' = 1 + tg^2 x$

مشتق مجموع عدة دوال $y = u + v - w \Rightarrow y' = u' + v' - w'$

مشتق جداء عدة دوال $y = u.v \Rightarrow y' = uv' + u'v$

مشتق حاصل قسمة دالتين $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

مشتق دالة الدالة: نقول عن دالة ما بأنها تابع التابع فيما إذا كان هذا التابع معينا بالنسبة لـــ x بواسطة علاقة تحوي تابعا وسيطا

$$\begin{Bmatrix} y = f(u) \\ u = \varphi(x) \end{Bmatrix} \Rightarrow y'_x = y'_u \, . u'_x$$

مشتق التابع المعاكس لتابع معلوم

ليكن التابع $y = f(x)$ والتابع المعاكس $x = g(y)$

إذا كان للتابع $y = f(x)$ مشتقا ونرمز له $y' = f'(x)$ وللتابع المعاكس مشتقا $x' = g'(y)$ هناك العلاقة التالية التي تربط ما بين المشتقين وهي:

$$y'x \, . x'y = 1 \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

المشتقات المتتالية

ليكن لدينا الدالة $y = x^n$ تقبل مشتقا من الدرجة الأولى $y' = nx^{n-1}$، يمكن اعتبار المشتق دالة جديدة ونحسب مشتق هذه الدالة فنحصل على المشتق من الدرجة الثانية $y'' = n(n-1)x^{n-2}$ وهكذا دواليك نحصل على كافة المشتقات المتتالية حتى الدرجة n $\quad y^{(n)} = n(n-1)(n-2)..........3 \times 2 \times 1 = n!$

المشتق من الدرجة $(n+1)$ يساوي دائما الصفر.

تطبيق عملي

احسب المشتق النوني للدالة $y = \frac{1}{x}$

المشتق الأول= $y' = -\frac{1}{x^2}$ والمشتق التالي= $y'' = \frac{2}{x^3}$

نلاحظ أن المشتقات للمتتالية تغير إشارتها كل مرة. إذن المشتق النوني للدالة يساوي: $y^n = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$

مشتق الدوال الضمنية

لتكن لدينا المعادلة $f(x,y) = 0$ والتي تربط المتحولين x وy ببعضهما. نقول بأن هذه العلاقة تعرف التابع y بدلالة x.

أن مشتق التابع الضمني معطى بالدستور التالي:

$$f_x'(x,y) + y'f_y'(x,y) = 0 \Rightarrow y' = -\frac{f'x}{f'y}$$

مثال: احسب مشتق الدالة الضمنية: $x^2 + y^2 = 1$

<u>الحل</u>: نطبق الدستور فنحصل على:

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow 2yy' = -2x \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

أهمية دراسة المشتقات

1- إن دراسة مشتق الدالة يسمح لنا بمعرفة اتجاه تغير الدالة. فإذا كانت إشارة المشتق موجبة تكون الدالة متزايدة، وإذا كانت الإشارة سالبة تكون الدالة متناقصة.

2- تمر الدالة بنهاية قصوى (عظمى أو صغرى) إذا انعدم المشتق الأول. إذا كانت إشارة المشتق الثاني سالبة نكون أمام نهاية عظمى. وإذا كانت الإشارة موجبة نكون أمام نهاية صغرى. وإذا انعدم المشتق الأول بدون أن يغير الإشارة نكون أمام نقطة انعطاف.

3- في ميدان الإحصاء: يمكن توفيق المنحنيات بطريقة المربعات الصغرى. هذه الطريقة تعتمد على المشتقات الجزئية.

4- في الميدان الاقتصادي: كل التحليل الحدي يقوم على أساس المشتقات. فدالة النفقة الحدية هي مشتق دالة النفقة الكلية ودالة الإيراد الحدي هي مشتق دالة الإيراد الكلي. كما أن شرط تعظيم الربح يقوم على أساس أن نعدم مشتق دالة الربح. كما أن مفهوم المرونة يقوم على أساس المشتقات.

المشتقات الجزئية

لقد درسنا حتى الآن الدوال من الشكل $y = f(x)$ هناك دوال لعدة متغيرات. مثال دالة الإنتاج تابعة لمتغيرين أو أكثر وهي عوامل الانتاج من عمل ورأس المال وتكتب على الشكل التالي: $z = f(x, y)$. نرى أن التابع يتبع متغيرين x وy. يقابل كل قيمتين اختياريتين للمتحولين المستقلين x وy قيمة واحدة للتابع. يمكننا أن نعبر في تابع متعدد المتحولات كل المتحولات ثابتة ما عدا متحول واحد. مثلا نعطي للدالة: $z = f(x, y)$ قيمة ثابتة للمتحول y ونحولx لوحده فنحصل على تابع ذي متحول واحد. نسمي مشتق هذا التابع بالنسبة لـــx بالمشتق الجزئي ونرمز له:

$$f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x);y-f(x,y)}{\Delta x}\right]$$

بنفس الطريقة يمكن أن نحسب مشتق هذا التابع بالنسبة لـ y ونسمي ذلك المشتق الجزئي ونرمز له: $f\acute{y}(x,y)$

يمكن كتابة المشتقات الجزئية بالرموز التالية: $z'_Y=\dfrac{\partial z}{\partial y}\quad z'_X=\dfrac{\partial z}{\partial x}$

إن طريقة حساب المشتقات الجزئية هي نفس طريقة حساب المشتقات العادية.

مثال: احسب المشتقات الجزئية للتابع: $z=ax^2+2bxy+cy^2$

$$z_X=2ax+2by=2(ax+by)$$
$$z_Y=2bx+2cy=2(bx+ey)$$

المشتقات الجزئية المتتالية

ليكن التابع $z=f(x,y)$ لنفترض أن هذا التابع له مشتقين جزئيين z_X, z_Y أن كل مشتق من هذين المشتقين يمثل تابعا للمتحولين x وy. ولكل منهما مشتقان جزئيان بالنسبة لهذين المتحولين المستقلين x وy. نسمي كلا منهما بالمشتق الجزئي الثاني ونرمز له: $z''_{XY}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial\times\partial y},\ z''_{YY}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ z''_{XX}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

تعظيم دالة لعدة متغيرات

لتعظيم دالة لعدة متغيرات لا بد من توفر الشروط التالية:

- نعدم المشتقات الجزئية من الدرجة الأولى $\dfrac{\partial z}{\partial X}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$
- نحسب المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

- نحسب قيمة المحدد الهيسي $H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}$ إذا كانت القيمة موجبة هناك نهاية قصوى وفي حالة العكس لا يوجد.
- ننظر إلى إشارة المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية فإذا كانت موجبة هناك حد أدنى وإذا كانت سالبة هناك حد أقصى.

تطبيق عملي

لدينا الدالة: $z = -2x^2 - y^2 + xy$

ما هي شروط تعظيم الدالة؟ احسب قيمتها.

الحل

نحسب المشتقات الجزئية من الدرجة الأولى ثم نعدمها.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -4x + y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -2y + x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 4x \\ x &= 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = 0$$

نحسب المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

نحسب قيمة المحدد الهيسي: $H = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \rangle 0$ بما أن الإشارة موجبة هناك نهاية قصوى.

ننظر إلى إشارة المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية. بما أنها سالبة هناك نهاية عظمى. قيمة الدالة : $z = f(0,0) = 0$

لدينا الدالة: $z = 2x + y - x^2 + xy - y^2$

ما هي شروط تعظيم هذه الدالة؟ احسب قيمتها.

الحل

نحسب المشتقات الجزئية من الدرجة الأولى ثم نعدمها.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2x + y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} 1 + x - 2y = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2 = 2x - y \\ 1 = -x + 2y\end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{5}{3} \quad y = \frac{4}{3} \quad z = \frac{7}{3}$$

نحسب المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$

نحسب المحدد الهيسي. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$

بما أن قيمة المحدد موجبة هناك نهاية قصوى

بما أن إشارة المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية سالبة هناك نهاية عظمى. قيمة هذه الدالة $z = f(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{7}{3}$

القيم العظمى المشروطة

في بعض الأحيان نريد تعظيم دالة لعدة متغيرات تحت قيد.

هناك طريقتان لحل هذا النوع من المسائل.

الطريقة الأولى: طريقة التعويض

مثال: أوجد النهاية العظمى للدالة: $z = (x-1)^2 + (y-2)^2$ تحت القيد

$x - y = 2 \Rightarrow x = y + 2$

الحل

من المعادلة الثانية نحصل على: $x = y + 2$

نعوض ذلك في الدالة الأولى فنحصل على: $z = (y+1)^2 + (y-2)^2$

نريد تعظيم هذه الدالة. هذا يفترض أن نعدم المشتق الأول أي:

$$z' = 2(y+1) + 2(y-2) = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}, x = \frac{5}{2}$$

لمعرفة ما إذا كنا أمام نهاية عظمى أو صغرى ننظر إلى إشارة المشتق الثاني فنجد $z'' = 4$ بما أن الإشارة موجبة فنحن أمام نهاية صغرى. قيمة الدالة تساوي $z = \frac{9}{2}$.

الطريقة الثانية: مضاعف لاغرانج

لكي نعظم دالة ما تحت قيد ما نشكل الصيغة التالية:

$$V = (x-1)^2 + (y-2)^2 + \lambda(2 - x + y)$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= 2(x-1) - \lambda = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= 2(y-2) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \lambda} &= 2 - x + y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda &= 2(x-1) \\ \lambda &= 2(2-y) \end{aligned}$$

نشكل النسبة بينهما فنجد: $\Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 = \dfrac{x-1}{2-y} \\ 2 = x-y \end{matrix}\right\}$ نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين

بحلهما نحصل على كافة العناصر. أي: $z = \dfrac{9}{2} \quad y = \dfrac{1}{2} \quad x = \dfrac{5}{2}$

عظم الدالة: $z = 30 - 3x - 4y$

تحت القيد: $x^2 + y^2 = 25$

الحل

نستخدم طريقة مضاعف لاغرانج. نشكل الصيغة التالية:

$$V = 30 - 3x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -3 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -4 + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 3 = 2\lambda x \\ 4 = 2\lambda y \end{matrix}$$

نشكل النسبة بينهما فنحصل على: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4}$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على:

$$\left\{\begin{matrix} 3x = 4y \\ x^2 + y^2 = 25 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = 3 & y = 4 & z = 5_{\min} \\ x = -3 & y = -4 & z = 55_{\max} \end{matrix}$$

التفاضل

تحديده: إذا كان لدينا الدالة $y = f(x)$ معرفة ومستمرة في المجال $|a,b|$ وتقبل مشتقا $y' = f'(x)$ نسمي تفاضل التابع ونرمز له بالرمز dy المقدار

$$dy = f'(x)dx$$

تفاضل التابع= جداء المشتق بتفاضل المتحول المستقل. يمكن أن نكتب $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ أي أن مشتق التابع= حاصل قسمة تفاضل التابع على تفاضل المتحول المستقل x.

المعنى الهندسي للتفاضل

لدينا التابع $y = f(x)$ نرسم خطه البياني.

أن ميل المماس MT في النقطة M والتي تكون احداثياتها (x_0 , y_0) تساوي مشتق الدالة من اجل القيمة x_0 للمتحول المستقل.

لتكن النقطة ´M نقطة مجاورة للنقطة M على نفس المنحنى (C) احداثياتها هي $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ نلاحظ من الشكل بأن المقدار PM-PM=QM=Δy. إن ظل الزاوية التي يصنعها المماس MT مع المستقيم الموازي لمحور السينات يساوي المشتق: $tg\alpha = \frac{QN}{QM} = y'$. وهكذا نستنتج بأن المقدار QN يمثل تفاضل الدالة.

$$dy = f'(x)dx \Leftarrow QN = y'.\Delta x$$

خواص التفاضل

بما أن التفاضل يساوي جداء المشتق بتفاضل المتحول x فإن خواص التفاضل تنتج مباشرة من خواص المشتق.

- تفاضل مجموع عدد من التوابع=مجموع تفاضل هذه التوابع
$$y = u + v - w \Rightarrow dy = du + dv - dw$$
- تفاضل جداء عدد التوابع= مجموع الجداءات التي نحصل عليها عندما نبدل بالتتالي كل مضروب من الجداء المفروض بتفاضله.
$$y = u.v.w \Rightarrow dy = u.vdw + uwdv + vwdu$$
- تفاضل حاصل قسمة تابعين=تفاضل الصورة في المخرج ناقص تفاضل المخرج في الصورة والكل مقسوم على مربع المخرج
$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow dy = \frac{udv - vdu}{v^2}$$

التفاضلات المتتالية

نسمي التفاضل الثاني تفاضل تفاضل الأول $d^2y = f''(x)dx^2$

وبنفس الطريقة نجد $d^n y = f^n(x)dx^n$

يمكن كتابة المشتقات المتتالية على الشكل التالي:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad y'' \frac{d^2y}{dx^2} \quad y^n = \frac{d^n y}{dx^n}$$

التفاضل الكلي

عرفنا تفاضل التابع $y = f(x)$ بأنه المقدار $dy = f'(x)dx$ نعرف تفاضل تابع متعدد المتحولات بنفس الطريقة ونسميه التفاضل الكلي.

$$z = f(x, y) \Rightarrow dz = f_x dx + f_y dy$$

تطبيقات عملية

1- عددان x و y جداءهما ثابت $P = xy = a$

متى يمر المجموع بحده الأدنى؟ $S = x + y$

الحل

لدينا المعادلتان التاليتان $\begin{cases} P = xy = a \\ S = x + y \end{cases}$

نعوض $y = \dfrac{P}{x}$

يمر المجموع بحده الأدنى عندما $S = x + \dfrac{P}{x}$

نعدم مشتق الدالة

$$S = x + \frac{P}{x}$$

$$S' = 1 - \frac{P}{x^2} = 0 \Rightarrow P = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{P = y}$$

النتيجة: يمر المجموع بحده الأدنى عندما يتعادل العددان.

مثال: 100x1=50x2=25x4=20x5=10x10

يمر المجموع بحده الأدنى عندما يتساوى العددان. 10+10=20

2- عددان مجموعهما ثابت $S' = x + y = a$

متى يمر الجداء بحده الأقصى؟ $P = xy$

$$S = x + y \Rightarrow y = S - x$$

$$P = x.y = x(S - x) = Sx - x^2$$

يمر الجداء بحده الأقصى عندما ينعدم المشتق

$$P' = S - 2x = 0 \Rightarrow S = 2x \Rightarrow x = \frac{S}{2} = y$$

النتيجة: يمر الجداء بحده الأقصى عندما يتساوى العددان.

مثال: 10=5+5=6+4=7+3=8+2=9+1

الجداء 9 16 21 24 25

يمر الجداء بحده الأقصى عندما يتساوى العددان.

3- تقاطع منحنى النفقة المتوسطة والحدية، يتقاطع هذان المنحنيان عندما يمر منحنى النفقة المتوسطة بحده الأدنى أي عندما نعدم مشتق دالة النفقة المتوسطة.

لدينا المعادلات التالية:

دالة النفقة الكلية $CT = f(x)$

دالة النفقة المتوسطة $CMo = \frac{f(x)}{x}$

دالة النفقة الحدية $CMa = f'(x)$

نعدم دالة النفقة المتوسطة فنحصل على:

$$(CMo)' = \frac{xf'x - f(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x}$$

مثال

لدينا دالة النفقة الكلية $CT = x^3 - 3x^2 - 8x$

دالة النفقة المتوسطة $CMo = x^2 - 3x + 8$

دالة النفقة الحدية $CMa = 3x^2 - 6x + 8$

نحسب مشتق دالة النفقة المتوسطة $(CMo)' = 2x - 3$

ينعدم المشتق عندما $x = 3/2$ في هذه الحالة نلاحظ أن النفقة الحدية $= 23/4 =$ النفقة المتوسطة

4- احسب مشتق الدالة $y = (2x^3 - 4x^2 + 5)^4$

نفترض $u = 2x^3 - 4x^2 + 5$ إذن نحصل على $y = u^4$ نحن أمام دالة الدالة.

مشتق دالة الدالة. $y'_x = y'_u . u'_x$ نحسب مشتق u فنجد $u'_x = 6x^2 - 8x$

منها نجد. $y'_x = 4(2x^3 - 4x^2 + 5)(6x^2 - 8)$

5- احسب مشتق الدالة $y = \sqrt{3x^2 - 4}$

نفترض $u = 3x^2 - 4$ إذن $u'_x = 6x$

تصبح الدالة كالتالي: $y = \sqrt{u} \Leftarrow y'_x = \dfrac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 4}}$

6- احسب مشتق كل من الدالة $y = x^x$ ثم الدالة $y = x^{x^x}$

الحل

مشتق الدالة $y = x^x$ هو $y' = x^x(1 + Lx)$

مشتق الدالة $y = x^{x^x}$ نفترض $u = x^x$

مشتق الدالة $u'_x = x^x(1 + Lx)$ إذن لدينا الدالة $y = x^u$

مشتق الدالة $Ly = uLx \Rightarrow \frac{dy}{y} = (u'Lx + \frac{u}{x})dx$

$$y'_x = x^{x^x}.x^x(Lx + L^2x + \frac{1}{x})$$

7- لدينا الدالة: $y = L_e\sqrt{x^2 + y^2}$

برهن على أن: $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$

<u>الحل</u>

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= \frac{x}{x^2 + y^2} \\ f'_y &= \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f''_{xx} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ f''_{yy} & \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f''_{xx} + f''_{yy} = 0$$

8- احسب المشتق النوني للدالة: $y = \frac{1}{1-x}$

<u>الحل</u>

المشتق الأول: $y' = (1 - x)^{-2}$

المشتق الثاني: $y'' = -2(1 - x)^{-3}$

المشتق الثالث: $y''' = 6(1 - x)^{-4}$

المشتق النوني: $y^n = \frac{n!}{(1 - x)^{n+1}}$

9- احسب كافة المشتقات الجزئية للدوال التالية:

$$z = x.e^{y} + ye^{x}\begin{cases} z''_{xx} = ye^{x} \\ z''_{yy} = xe^{y} \\ z''_{xy} = e^{x} + e^{y} \end{cases}$$

$$z = e^{xy}\begin{cases} z_{x} = ye^{xy} \\ z_{y} = xe^{xy} \end{cases}\begin{cases} z''_{xx} = y^{2}e^{xy} \\ z''_{yy} = x^{2}e^{xy} \\ z''_{xy} = (1+xy)e^{xy} \end{cases}$$

10- أوجد النهاية العظمى للدالة: $z = 20\sqrt{xy}$

تحت القيد التالي: $2x + 5y = 300$

الحل

نشكل صيغة لاغرانج فنحصل على: $V = 20\sqrt{xy} + \lambda(2x + 5y - 300$

نعدم المشتقات الجزئية فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= 10y^{1/2}x^{-1/2} - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 10x^{1/2}y^{-1/2} - 5\lambda = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \lambda} &= 300 - 2x - 5y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2\lambda &= 10\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2} \\ 5\lambda &= 10\left(\frac{x}{y}\right)^{1/2} \\ 300 &= 2x + 5y \end{aligned}$$

نشكل النسبة بينهما فنحصل على: $\frac{2}{5} = \frac{y}{x}$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين $\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 2x + 5y = 300 \end{cases} \Rightarrow x = 75,\ y = 30,\ z = 948$

11- عظم الدالة: $z = 30 - 3x - 4y$ تحت القيد $x^2 + y^2 = 25$

الحل

نستخدم طريقة مضاعف لاغرانج، نشكل الصيغة

$$V = 30 - 3x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -3 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow 3 = 2\lambda x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -4 + 2\lambda y = 0 \Rightarrow 4 = 2\lambda y$$

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 25 = 0$$

نشكل النسبة بينهما فنحصل على: $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين: $\begin{cases} 4x = 3y \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

$$x = 3 \quad y = 4 \quad z = 5_{\min}$$

$$x = -3 \quad y = -4 \quad z = 55_{\max}$$

12- احسب مشتق الدوال التالية:

$$y^3 = \frac{x - y}{x + y} \Rightarrow y' = \frac{1 - y^3}{1 + 3xy^2 + 4y^3}$$

$$Ly + \frac{x}{y} = c \Rightarrow y' = \frac{y}{x - y}$$

$$y = \frac{xLx}{e^x} \Rightarrow y' = \frac{1 + Lx - xLx}{e^x}$$

13- احسب مشتق الدالة $y = x^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$

الحل

نحسب لوغاريتم الطرفين فنحصل على:

$$Ly = 2Lx + \frac{1}{2}\left[L(x^2+1) - L(x+1)\right]$$

نحسب المشتق $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)} \Rightarrow y' = y\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2(x-1)}\right)$

14- لدينا الدالة: $x^y = y^x$

احسب مشتق الدالة الضمنية

الحل

نحسب التفاضل الكلي $dz = f_x dx + f_y dy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_x dx = yx^{y-1} - y^x Ly \\ f_y dy = x^y Lx - xy^{x-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f_x dx = -f_y dy \\ y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{fx}{fy} \end{array}$$

نستطيع أن نختصر باعتبار أن: $x^y = y^x$

$$y' = \frac{yx^{y-1} - y^x Ly}{x^y Lx - xy^{x-1}} = -\frac{-\frac{y}{x} - Ly}{Lx - \frac{x}{y}} \qquad y' = \frac{y}{x}\left(\frac{y - xLy}{x - yLx}\right)$$

15- أوجد النهاية القصوى للدالة $z = 20x_1x_2 - (x_1^2 + x_2^2)$ تحت القيد التالي: $2x_1 + 5x_2 = 230$

الحل

لتعظيم دالة تحت قيد نشكل صيغة لاغرانج

$$V = 20x_1x_2 - (x_1^2 + x_2^2) + \lambda(2x_1 + 5x_2 - 230)$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_1} &= 20x_2 - 2x_1 + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} &= 20x_1 - 2x_2 + 5\lambda = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x_1 - 5x_2 - 230 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2\lambda &= 2x_1 - 20x_2 \\ 5\lambda &= 2x_2 - 20x_1 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 230 \end{aligned}$$

نشكل النسبة بينهما فنحصل على: $\frac{2}{5} = \frac{x_1 - 10x_2}{x_2 - 10x_1}$

نحن إذن أمام جملة معادلتين لمجهولين.

$$\begin{cases} 52x_2 = 25x_1 \\ 5x_2 + 2x_1 = 230 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 52 \\ x_2 = 25 \end{cases}$$

16– لدينا دالة الاستثمار معطاة بالمعادلة التالية:

$$I = 100 + 4i - 40i^2 + 0{,}1y - 0{,}0005y^2$$

بحيث أن i تمثل معدل الفائدة. كذلك y تمثل الدخل.

ما هي شروط تعظيم هذه الدالة؟ احسب قيمة الاستثمار.

الحل

شروط تعظيم الدالة أن نعدم المشتقات الجزئية

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial I}{\partial i}=4-80i=0\\[2ex]\dfrac{\partial I}{\partial y}=0{,}1-0{,}010y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}4=80i\\0{,}1=0{,}01y\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{r}i=5\%\\y=10\end{array}$$

إذن معدل الفائدة= 5 % وكذلك الدخل =10

نعوض في دالة الاستثمار فنجد (I=100,4)

17- احسب مشتق الدالة الضمنية $x^3+2xy+y^3=5$

المشتق $3x^2+2y+2xy'+3y^2y'=0$

$$(3x^2+2y)=-y'(2x+3y^2)\Rightarrow y'=-\frac{3x^2+2y}{2x+3y^2}$$

18- لدينا الدالة: $Z=axy-bx^2-c\log y$

ما هي شروط تعظيم هذه الدالة. ارسم الخطوط البيانية.

الحل

نحسب المشتقات الجزئية ونعدمها فنحصل على:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial x}=ay-2bx=0\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=ax-\dfrac{c}{y}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{2bx}{a}\\[2ex]y=\dfrac{c}{ax}\end{array}\right.$$

يتقاطع المنحنيان في النقطة I (x_0,y_0)

19- لدينا الدالة: $A = L(xy+z)$ احسب المشتقات الجزئية وقيمتها في النقطة H(1,2,0)

الحل

نفترض $u = xy + z$ إذن $A = Lu$

مشتق الدالة اللوغاريتيمية هو $\frac{u'}{u}$ وهكذا نحصل $\begin{cases} u'_z = 1 \\ u'_x = y \\ u'_y = x \end{cases}$

إذن $A'_x = \frac{y}{xy+z}$ قيمة المشتق في النقطة H هي 1

كذلك $A'_y = \frac{x}{xy+z}$ قيمة المشتق في النقطة H هي $\frac{1}{2}$

أخيرا $A'_z = \frac{1}{xy+z}$ قيمة المشتق في النقطة H هي $\frac{1}{2}$

20- احسب مشتق معكوس الدالة $y = x^2$

الحل

معكوس الدالة $y = x^2$ هو الدالة $x = \sqrt{y}$

مشتق الدالة $y = x^2$ هو الدالة $y' = 2x$

مشتق معكوس الدالة $x' = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

النتيجة: إذا كان للدالة معكوس $y = f(x)$ فمشتق معكوس الدالة يساوي مقلوب مشتق الدالة. $x'y = \frac{1}{y'x} = \frac{1}{2x}$

21- احسب مشتق الدالة $y = L\sin x$

نفترض $u = \sin x$ إذن لدينا الدالة $y = Lu$

مشتق الدالة $y' = \dfrac{u'}{u}$.بما أن $u = \sin x$

إذن مشتق الدالة $y' = \dfrac{u'}{u}$ هو $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{tgx}$

22- احسب مشتق كل من الدوال

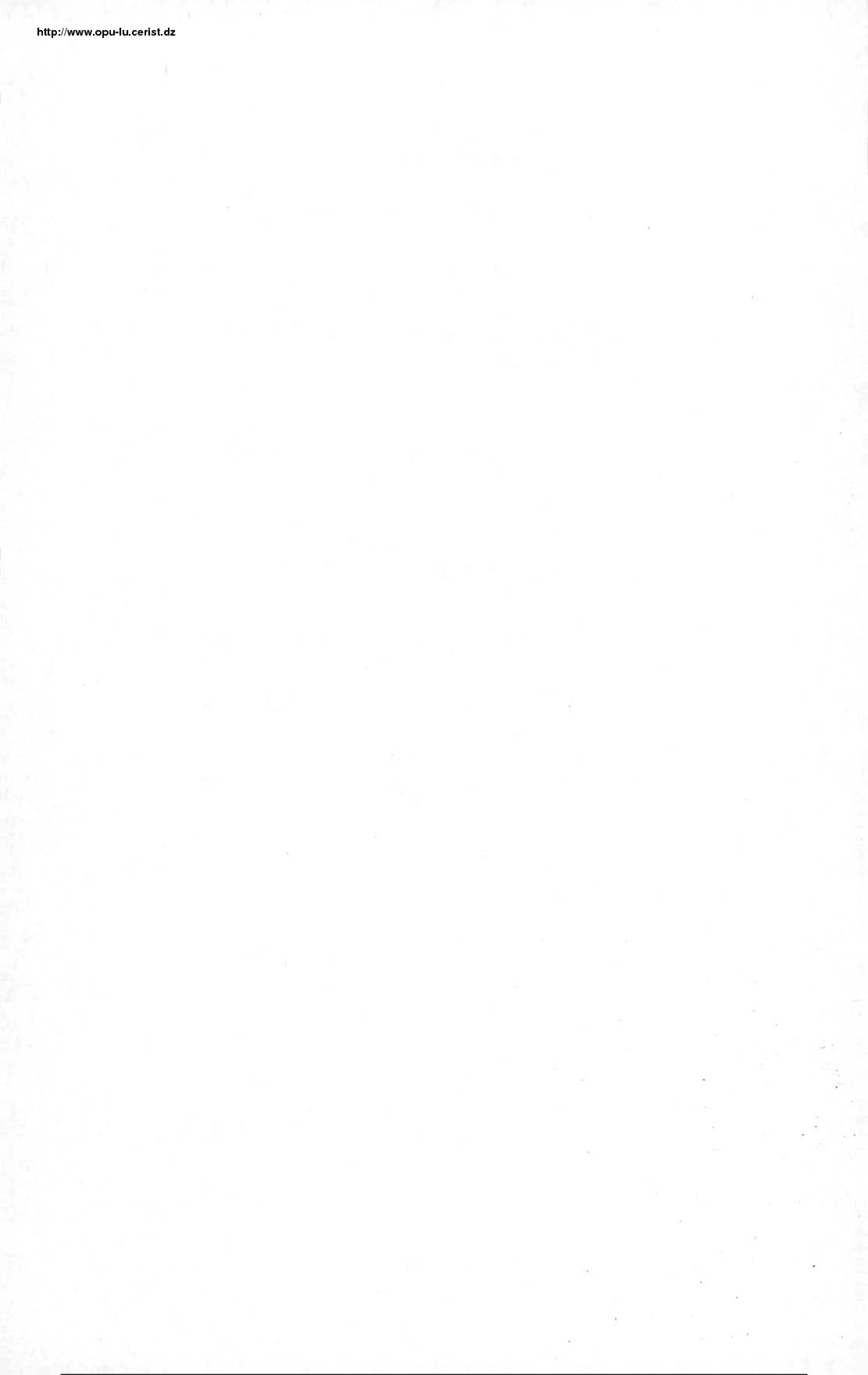
<u>الحل</u>

مشتق الدالة $xy = (x+y)^2$ هو $y' = \dfrac{y}{x}$

مشتق الدالة $e^{xy} = x \Leftarrow y' = \dfrac{1-Lx}{x^2}$

مشتق الدالة $x^2 + y^2 + xy = 1 \Leftarrow y' = -\dfrac{2x+y}{x+2y}$

مشتق الدالة $x^2y^2 = 1 + y^2 \Leftarrow y' = \dfrac{xy}{1-x^2}$



الفصل الرابع

الدوال

مقدمة

الدالة: عبارة عن أداة رياضية للتعبير عن العلاقة ما بين متغيرات متعددة. مثلا في علم الاقتصاد هناك علاقة ما بين سعر السلعة والكمية المطلوبة. كذلك العلاقة ما بين حجم الإنتاج ونفقات الإنتاج أو العلاقة ما بين الدخل والاستهلاك.

المتغير: كل ظاهرة اقتصادية يمكن التعبير عنها بعدد ما وتكون هذه القيمة قابلة للتغيير تسمى بالمتغير وعلى العكس كل ظاهرة تبقى قيمتها ثابتة تسمى بالثابت.

المجال: إذا كان المقدار x قابل لأن يأخذ كل القيم العددية الواقعة ما بين العددين a و b بحيث أن $[a\langle x\langle b]$. نقول عن المتغير بأنه يتحول باستمرار ضمن المجال $[a,b]$ ونسمي العددين a و b بحدي المجال.

إذا ارتبط متحولان بحيث أنه إذا تعينت قيمة الأول أمكن معرفة الثاني. نسمي المقدار الثاني تابعا للأول ونسمي المقدار الأول بالمتحول المستقل. ففي الميدان الاقتصادي الطلب هو دالة لسعر سلعة ما، يعني ذلك أنه يترتب على كل سعر يتحدد في السوق لهذه السلعة كمية معينة يقبل المشترون على شراءها وإذا تغير السعر تغيرت الكمية المطلوبة. فالسعر يمثل المتغير المستقل والكمية المطلوبة تمثل

التابع. يعبر عن ذلك رياضيا بالعلاقة $y = f(x)$. بحيث أن y تمثل التابع و x تمثل المتغير المستقل.

في بعض الأحيان يمكن للمتحول x أن يأخذ كل القيم العددية دون أي تحديد. عندئذ نقول بأن المتحول x يتحول من $-\infty$ إلى $+\infty$ مثال الدالة $y = 2x - 3$. لكن هناك دوال أخرى لا يتمتع فيها المتحول المستقل بهذه الحرية مثال: $y = \sqrt{x-3}$.

لا يمكن للمتحول x أن يأخذ إلا القيم التي تجعل ما تحت الجذر موجبا أي القيم التي تحقق المتراجحة $x \geq 3$ نقول بأن الدالة معرفة من أجل هذه القيم فقط.

في بعض الأحيان يكون المتغير تابعا لعدد من المتغيرات الأخرى وليس لمتغير واحد فقط. مثال الدخل القومي هو دالة للاستهلاك والاستثمار والصادرات والواردات $y = f(C, I, X, M)$. نقول عن المتغير التابع هو دالة لعدة متغيرات $z = f(x, y)$.

الدالة الصريحة والدالة الضمنية

تكون الدالة صريحة أو ظاهرة إذا وقعت المتغيرات المستقلة في أحد طرفي المعادلة والمتغير التابع في الطرف الثاني. مثال: $y = 3x - 5$

أما إذا كانت المتغيرات المستقلة والمتغير التابع متداخلة سوية تكون الدالة ضمنية. مثال: $2x + 3y - 2xy = 0$.

في بعض الأحيان يمكن تحويل دالة ضمنية إلى دالة صريحة. مثال

$$2x + 3y - 2xy = 0 \Rightarrow y = \frac{2x}{2x-3}$$

إلا أنه في بعض الأحيان يكون ذلك صعبا إن لم يكن مستحيلا.

مثال: $y^2 - x^2 + \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{xy} = 0$

التابع الزوجي والفردي والدوري

- نقول عن تابع بأنه زوجي عندما يقابل قيمتين متناظرتين للمتحول x قيمة واحدة للتابع y أي عندما تتحقق العلاقة التالية: $f(x) = f(-x)$
مثال: الدالة $y = x^2$ أو الدالة $y = \cos x$ هي دوال زوجية. فلو أعطينا قيمتين متناظرتين $x = \pm 2$ لحصلنا على نفس القيمة $y = 4$. إذا مثلنا هذا التابع بخط بياني كان هذا المنحنى متناظرا بالنسبة لمحور العينات.
- أما إذا أخذ التابع قيمتين متناظرتين من أجل كل قيمتين متناظرتين للمتحول x نقول أن هذا التابع فردي. مثال: $y = x^3$ أو $y = \sin x$.
إذا مثلنا هذا المنحنى بيانيا لحصلنا على خط متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.
- نقول عن تابع بأنه دوري ودوره Π إذا تحققت مهما كانت قيمة x العلاقة التالية: $f(x) = f(x + \Pi)$

لدراسة تابع دوري يكفي أن ندرسه ضمن دور من أدواره واقع في مجال تعريفه. نحصل على دراسة التابع في بقية مجال تعريفه بالمماثلة.

لرسم الخط البياني لتابع دوري يكفي أن نرسم القطعة المقابلة للدور ونحصل على بقية أجزاء الخط البياني بانسحابات متتالية موازية للمحور OX طول كل منها الدور Π مثال: لدراسة الدالة $y = \sin x$ أو الدالة $y = \cos x$ نلاحظ أن الدور المشترك لهما هو 2 Π. بينما دور الدالة $y = tgx$ هو العدد Π.

الدوال المتعاكسة

إذا كان y تابع لـــ x نرمز للعلاقة $y = f(x)$ يمكن أن نعتبر y متحولا مستقلا و x هو التابع ونستنتج العلاقة التي تعطينا x بدلالة y ونرمز لها بالعلاقة $X = \varphi(y)$ نسمي هذا التابع الأخير بالتابع المعاكس. مثال $y = \dfrac{2x}{x-1}$ التابع المعاكس له $x = \dfrac{y}{y-2}$. لو رسمنا الخط البياني للتابع $y = f(x)$، فإن الخط البياني للتابع المعاكس $X = \varphi(y)$ يكون مطابقا تماما للخط البياني الأول. أما إذا غيرنا الأسماء للمتحولات وذلك بأن نسمي دوما التابع y والمتحول المستقل x بحيث يأخذ التابع المعاكس $y = g(x)$، فإن الخط البياني لهذا التابع يناظر الخط البياني $y = f(x)$ بالنسبة لمنصف الزاوية.

التابع المتزايد والتابع المتناقص

عندما يتحول x يتبعه y فإذا تحول x و y بنفس الإتجاه قلنا بأن التابع متزايد وإذا تحولا باتجاهين معاكسين قلنا أن التابع متناقص.

- **القاعدة (1)**: يكون التابع متزايدا إذا كان المشتق موجبا وعلى العكس يكون التابع متناقصا إذا كان المشتق سالبا.

- **القاعدة (2):** يمر التابع بنهاية عظمى إذا انعدم المشتق مع تغيير الإشارة من موجب إلى سالب وبنهاية صغرى إذا انعدم المشتق مع تغيير الإشارة من سالب إلى موجب.

النهايات

إذا كان لدينا التابع $y = f(x)$. وإذا كان التابع y ينتهي إلى القيمة A عندما ينتهي المتغير x إلى القيمة B أي أن: $\lim_{x \to B} f(x) = A$

أمكن تقدير قيمة هذا التابع ونرمز lim للنهاية ويعني أن $x \to B$ أي أن x تقترب من B ولا تساويها.

مثال: لدينا التابع $y = x^2 - 4$. عندما تقترب $x \to 4$ نحسب قيمة y

فنجد: $3,999 \langle x \langle 4,001 \quad (3,999)^2 - 4 \langle y \langle (4,001)^2 - 4$

$$12 - 0,007999 \langle y \langle 12 + 0,008001$$

إذن عندما $x \to 4$ عندئذ $y \to 12$

تطبيق عملي:

$$y = \frac{(1-x)^2 - 1}{\lim\limits_{x \to 0} 2x}$$

$$\frac{(1-x)^2 - 1}{2x} = \frac{(1 - 2x + x^2) - 1}{\lim\limits_{x \to 0} 2x} = \frac{-2x + x^2}{2x} \qquad y \to -1$$

أما إذا عوضنا x بصفر مباشرة فإننا نحصل على $\frac{0}{0}$ أي عدم تعيين بينما للتابع نهاية، لذلك يجب إزالة حالات عدم التعيين وهي: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$

نظريات وخصائص النهايات

1- نهاية العدد الجبري لعدد محدود من المتحولات يساوي مجموع نهاياتها، فإذا

كان لدينا $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=B\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=A+B$

نهاية المجموع الجبري لعدد محدود من التوابع = المجموع الجبر لنهايات هذه التوابع.

2- نهاية تابع جبري مضروب بعدد ثابت يساوي نهاية ذلك التابع مضروب بنفس العدد الثابت. فإذا كان لدينا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$ و C تمثل العدد الثابت $\lim C.f(x)=C.B$.

3- نهاية مقلوب التابع تساوي مقلوب نهاية ذلك التابع شريطة أن لا تكون نهاية ذلك التابع صفرا. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B\neq 0$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{B}$

4- نهاية جداء عدد محدود من المتحولات يساوي جداء نهاياتها

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=B\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)]=A.B$$

5- نهاية تابع مرفوع لقوة يساوي نهاية ذلك التابع مرفوعة لنفس القوة شريطة أن لا تكون النهاية صفرا و القوة عدد حقيقي غير سالب.

$$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)^n=A^n$$

6- نهاية نسبة تابعين تساوي نسبة النهايتين شريطة أن لا تكون نهاية المخرج صفرا

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=B\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{A}{B}$$

نهاية حاصل قسمة التابعين تساوي حاصل قسمة نهايتي هذين التابعين شريطة أن لا تكون نهاية المخرج تساوي الصفر.

رســـــم الخـــط البيـــــاني

لرسم الخط البياني للدالة $y = f(x)$ نتبع الخطوات التالية:

* نعين المجالات التي يكون التابع فيها معينا ثم نفتش عن القيم التي ينتهي إليها التابع عندما ينتهي المتحول x إلى نهاية مجالات تحولاته ندرس نقاط تقاطع الخط البياني مع محاور الإحداثيات و نعين هذه النقاط.

* ندرس إذا كان التابع دوريا و نرجع مجال تحوله إلى أصغر ما يمكن.

* ندرس إذا كان المنحنى للتابع المذكور متناظرا و ذلك حسب القواعد التالية:

- إذا بدلنا x بـــ $-x$ و لم تتبدل إشارة التابع فإن الخط البياني متناظر بالنسبة للخط أما إذا تبدلت الإشارة فإن الخط البياني متناظر بالنسبة لمحور الإحداثيات0.

* نحسب المشتق و نحسب جذوره و القيم التي تغير إشارة المشتق لمعرفة النهايات العظمى أو الصغرى أو نقطة الإنعطاف inflexion .

* ندرس الخطوط المقاربة للمنحني و نعين وضعها Asymptotes.

* نحمل المعلومات في جدول شامل.

أخيرا نرسم الخط البياني بدقة كاملة.

تمرين رقم 1: أدرس الدالتين $Y_1 = x^2 - 3x - 10$

$Y_2 = -x^2 + x + 6$

أرسم الخطوط البيانية لهذين القطعين المكافئين. أحسب نقاط تقاطعهما. أرسم المستقيم الذي يمر بنقاط تقاطعهما. أحسب معادلة هذا المستقيم.

الحل

مجال التعريف : مجموعة الأعداد الحقيقية. $D = R$

- نحسب مشتق الدالتين $y_1' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

ينعدم كل مشتق من أجل $y_2' = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

نحسب جذور المعادلتين $\begin{cases} y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, & x_2 = 5 \\ y_2 = 0 \Rightarrow x_3 = -2, & x_4 = 3 \end{cases}$

لدينا جدول التغيرات كل من الدالتين. $y_2, \ y_1$

x	-∞		-2		0		3/2		5		+∞
y_1'		-		-		-	0	+		+	
y_1	-∞	↘	0	↘	-10	↘	-49/4	↗	0	↗	+∞

x	-∞		-2		0		½		3		+∞
y_2'		+		+		+	0	-		-	
y_2	-∞	↗	0	↗	6	↗	25/4	↘	0	↘	-∞

- نقاط تقاطع المنحنيين $y_1 = y_1 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0$

جذور هذه المعادلة من الدرجة الثانية هي: $A \left| \begin{array}{l} x_1 = -2 \\ y_1 = 0 \end{array} \right.$

أن المستقيم الذي يمر بالنقطتين A و B هو من الشكل $y = ax + b$

يجب تحديد قيمة هذه الثاوبت a و b $B \left| \begin{array}{l} x_2 = 4 \\ y_2 = -6 \end{array} \right.$

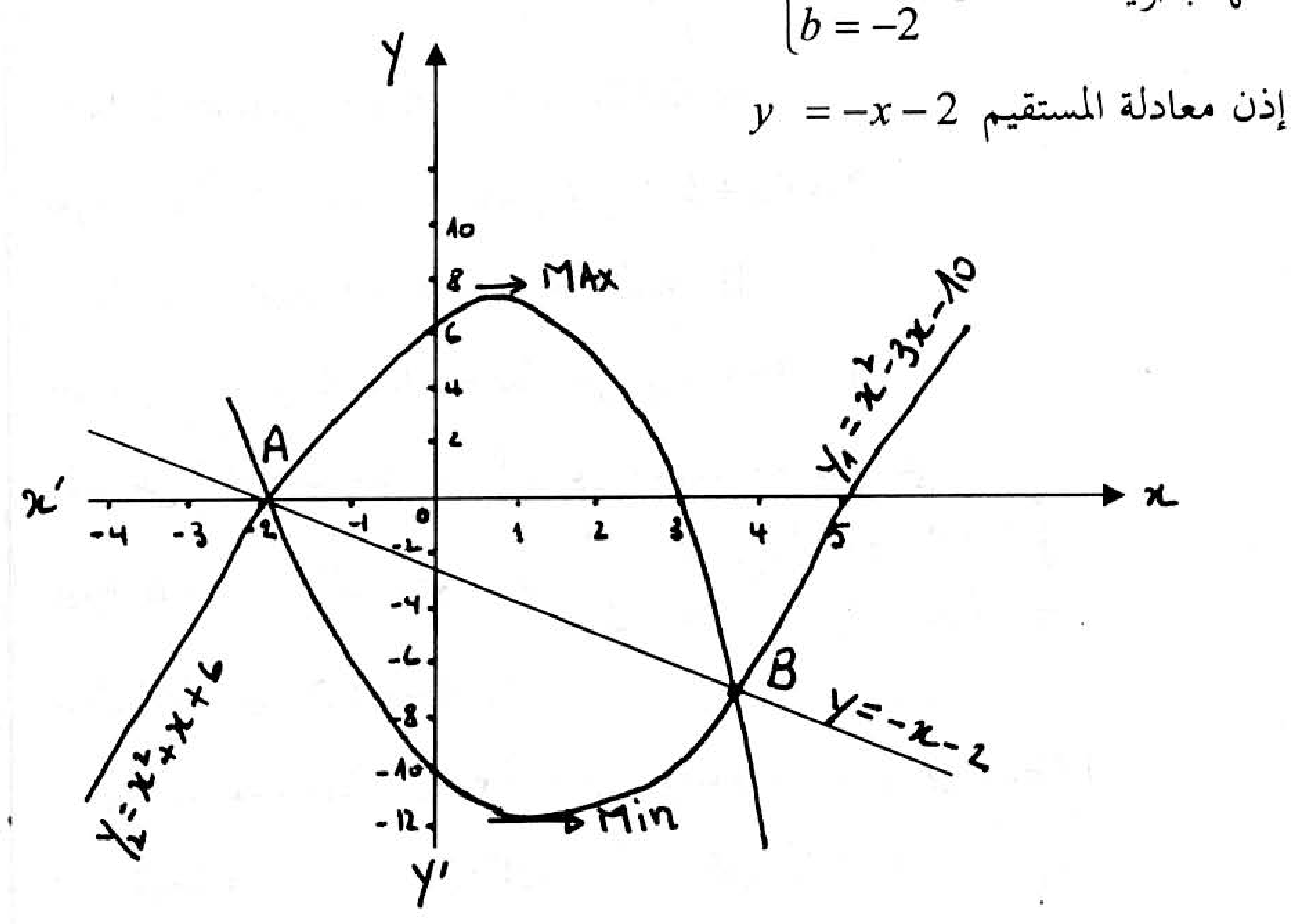
عندما يمر المستقيم بالنقطة A نحصل على :

عندما يمر المستقيم بالنقطة B نحصل على : $\begin{cases} 0 = -2a + b \\ -6 = 4a + b \end{cases}$

نحن أمام جملة معادلتين بمجهولين

نحلها بطريقة المحددات $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$

إذن معادلة المستقيم $y = -x - 2$



تمرين رقم2: لدينا النقطتين A و B معطاة بإحداثياتها:

$A \begin{vmatrix} x = 4 \\ y = -2 \end{vmatrix}$ $\quad$ $B \begin{vmatrix} x = 3 \\ y = -1 \end{vmatrix}$

- ما هي معدلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين A و B.
- أرسم الخط الباني.
- أرسم المستقيم المعطى بالدالة $y = 5x - 4$

- أحسب نقطة تقاطع المستقيمين.

- لدينا الدالة $y = 2x^2 - mx + 6$ حدد قيمة m علما بأن المنحنى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين.

- أرسم الخط البياني لهذا المنحنى.

الحل

- بما أن المستقيم $y = ax + b$ يمر بالنقطة A

نعوض x و y بقيمها فنحصل على : $-2 = 4a + b$

- بما أن المستقيم $y = ax + b$ يمر بالنقطة B

نعوض x و y بقيمها فنحصل على : $1 = 3a + b$

إذن نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين نحلهما فنحصل على :

قيمة a و b وبذلك نحصل على $\begin{cases} 2 = 4a + b \\ 1 = 3a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -1 \\ b = 2 \end{matrix}$

معادلة المستقيم $y = -x + 2$

- يتقاطع المستقيمان $y_1 = -x + 2$ مع $y_2 = 5x - 4$ في النقطة I

إحداثياها هي : $x = 1$ كذلك $y = 1$ يكفي أن نعادل $y_1 = y_2$

$$-x + 2 = 5x - 4 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1 \text{ ؛ } y = 1$$

- تحديد قيمة الثابت m : نفترض أن الدالة تمر بالنقطة I إحداثياها هي :

$$(y = 1 \ , \ x = 1)$$

$$2(1)^2 - m(1) + 6 = 1 \quad m = 7$$

معادلة الدالة هي : $y = 2x^2 - 7x + 6$

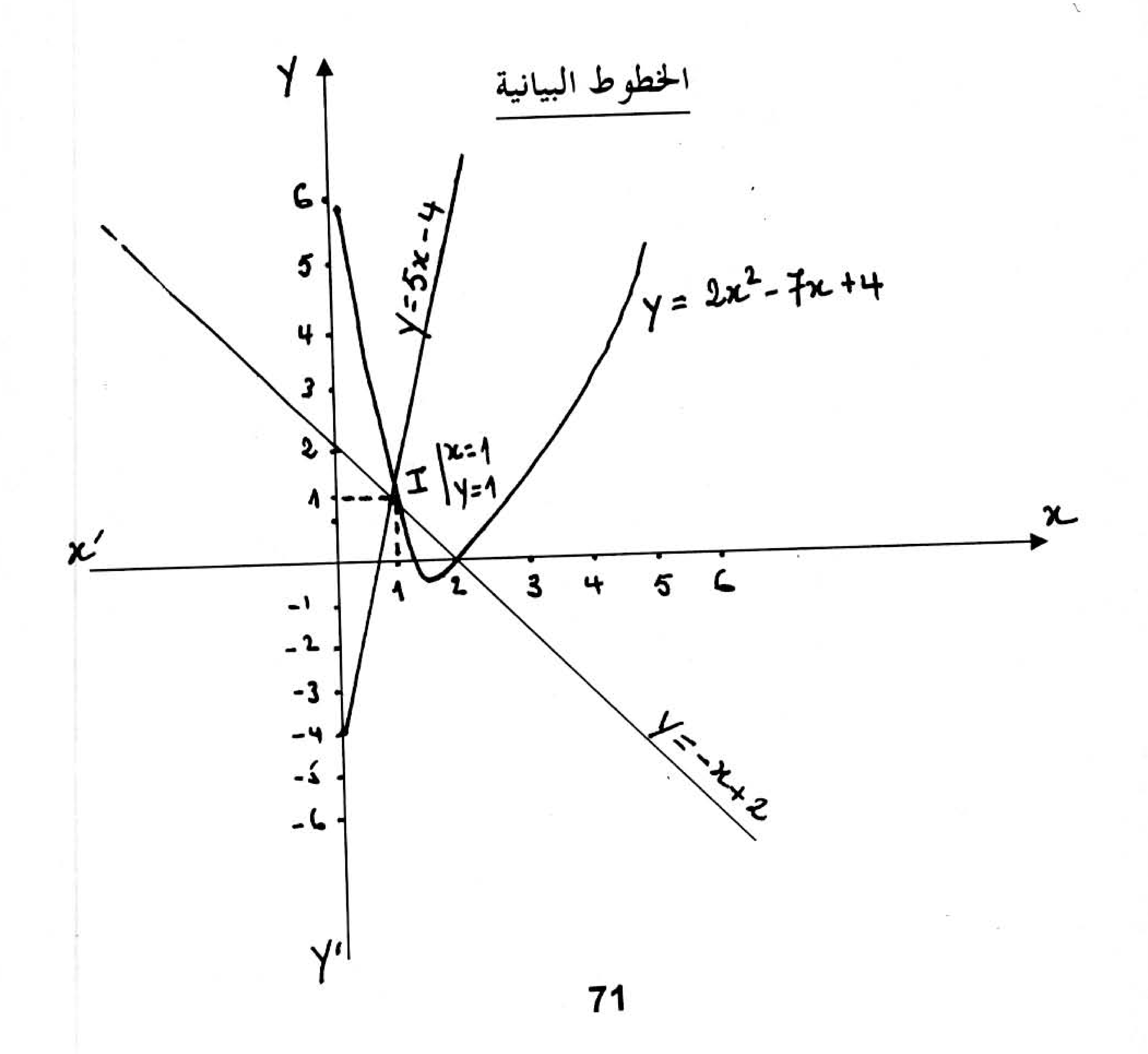
مشتق الدالة : $y' = 4x - 7$

ينعدم المشتق في النقطة : $y' = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{4}$

جذور المعادلة هي : $x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = 2$

بالأخير نحصل على كافة المعلومات من خلال الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		3/2		7/4		2		$+\infty$
y'		−		−		−	0	+		+	
y	$+\infty$	↘	6	↘	0	↘	1/8- Min	↗	0	↗	$+\infty$



تمرين رقم 3 : أدرس الدالة التالية : $y = \frac{2x+3}{3x+2}$ وارسم الخط البياني.

الحل

مجال التعريف : نلاحظ أن هذا التابع معرف من أجل جميع قيم x ما عدا القيمة التي تعدم المخرج $3x+2=0$ ومنها نجد :

$x = -\frac{2}{3}$ حيث يكون التابع منقطعا وغير محدد، للمنحنى إذن هناك خط مقارب معادلته $x = -\frac{2}{3}$. عندما تسعى x إلى اللانهاية فإن التابع y ينتهي إلى الكمية $\frac{2}{3}$. لحساب ذلك نقسم الصورة والمخرج على x فنحصل على :

$y = \frac{2+\frac{3}{x}}{3+\frac{2}{x}}$ عندما تتناهى x إلى اللانهاية فالكمية $\frac{2}{x}$ كذلك $\frac{3}{x}$ تتناهى إلى الصفر. إذن المقدار y يتناهى إلى الكمية $\frac{2}{3}$. وعندما $x=0$ عندئذ

$y = \frac{3}{2}+$ ؛ $y=0 \Leftarrow x = -\frac{3}{2}$

نحسب مشتق الدالة $y' = \frac{-5}{(3x+2)^2}$

إشارة المشتق سالبة، إذن الدالة تنازلية.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{2}{3}$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
y	$2/3$ ↘	0 ↘	-1 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	$\frac{3}{2}$ ↘	1 ↘	$\frac{2}{3}$

تمرين رقم 4 : أرسم الخط البياني للدالة : $y=\frac{2x^2-2x-1}{2(x-2)}$

الحل

مجال التعريف : $D=R-\{2\}$ هذه الدالة غير معرفة من أجل $x=2$ حيث يكون التابع منقطعا وغير معين. للخط البياني خط مقارب معادلته $x=2$.

للمنحنى خط مقارب آخر لحسابه نقسم الصورة على المخرج فنحصل على :

$y=x+1$

مشتق الدالة : $y'=\frac{2x^2-8x+5}{2(x-2)^2}$

ينعدم المشتق من أجل القيمتين التاليتين :

$$\begin{cases} x_1=\frac{4-\sqrt{6}}{2} \\ x_2=\frac{4+\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

يكون المشتق سالبا ما بين هاتين القيمتين.

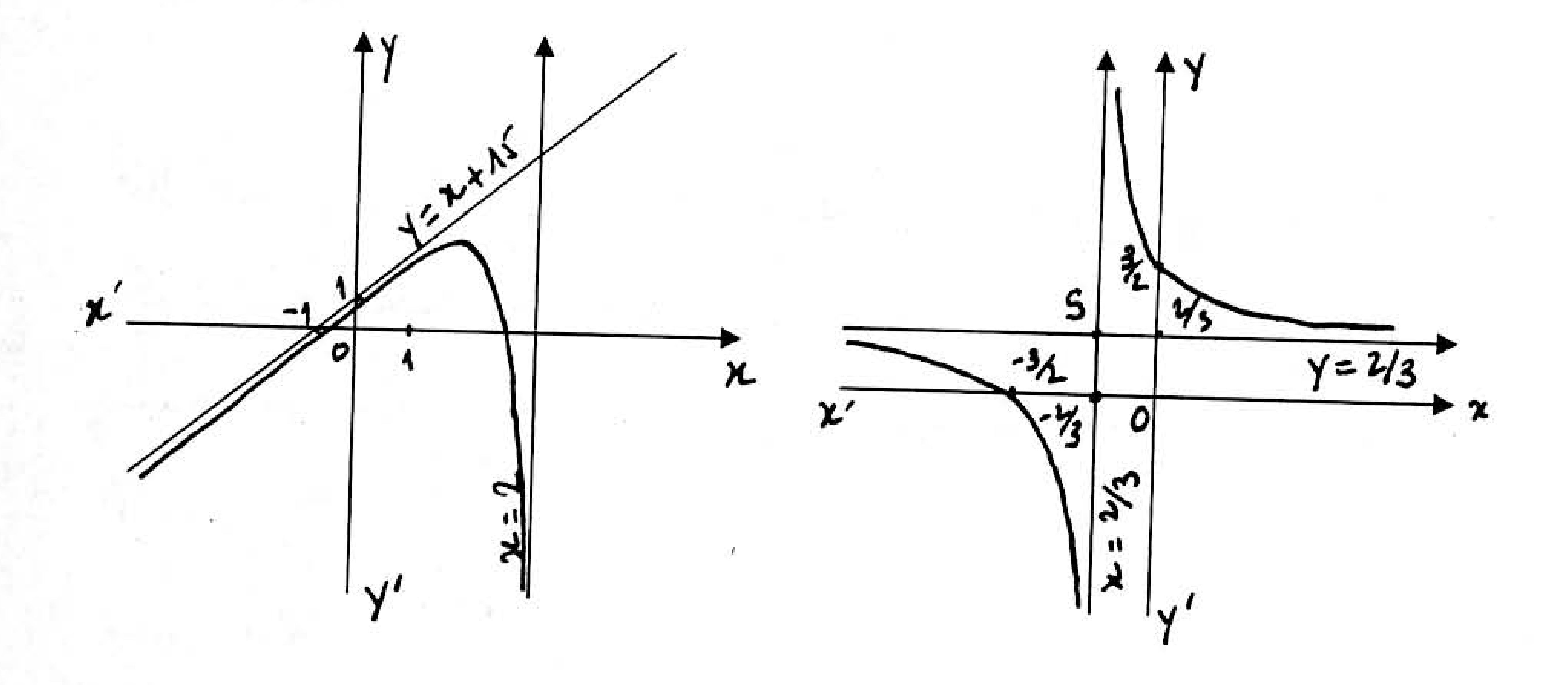
يمر التابع بنهاية عظمى من أجل القيمة الأولى وبنهاية صغرى من أجل القيمة الثانية.

نجمع كافة المعلومات في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		x_1		2		x_2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{1}{4}$	↗	$3-\sqrt{6}$	↘	∞- ‖ $+\infty$	↘	$3+\sqrt{6}$	↗	$+\infty$

الخطوط البيانية تمرين رقم 3

الخطوط البيانية تمرين رقم4



الفصل الخامس

الدالة اللوغاريتمية والأسية

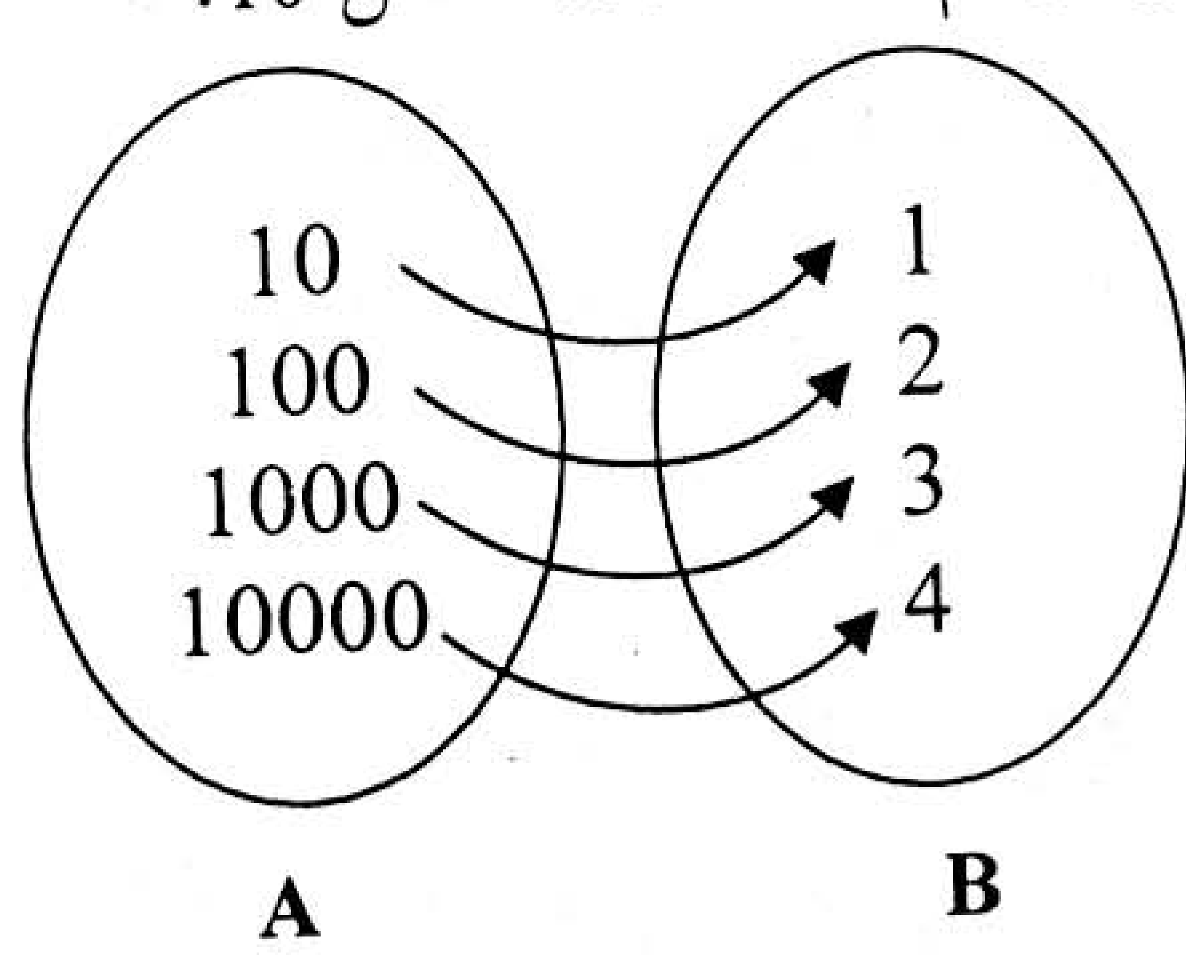
مقدمة : تحديد اللوغاريتم

إذا كانت لدينا الدالة $y = a^x$ بحيث أن a تمثل عدد ثابت أساس اللوغاريتم.

يمكن أن نكتب $y = Log_a y$

اللوغاريتم : هو القوة التي نرفع فيها الأساس للحصول على العدد.

مثال : $10^3 = 1000$ إذن العدد 3 يمثل لوغاريتم العدد 1000 أساس 10.



- إذا كانت لدينا المجموعتين A و B تتكونان من العناصر التالية :

A : هذه المجموعة تتكون عناصرها من عناصر متوالية هندسية أساسها 10 أي أن المجموعة هي :

$A = \{10,100,1000,....10^n\}$

$B = \{1,2,3,.........n\}$

أما المجموعة B فتتكون عناصرها من عناصر متوالية حسابية أساسها 1.

اللوغاريتم هو تطبيق عناصر المجموعة A بالمجموعة B بحيث أن لكل عنصر من عناصر المجموعة A صورة في المجموعة B. لذلك لا بد من تحديد أساس اللوغاريتم. هناك أساسين مهمين في الميدان الرياضي.

- أساس 10 : عندئذ نتحدث عن اللوغاريتم المعتاد
- أساس e : عندئذ نتحدث عن اللوغاريتم النيبيري.

خواص اللوغاريتم

- لوغاريتم جداء عددين = مجموع لوغاريتمات العددين.

$$Log(a \cdot b) = Loga + Logb$$

- لوغاريتم قسمة عددين = الفارق ما بين اللوغاريتمات.

$$Log\left(\frac{a}{b}\right) = Loga - Logb$$

- لوغاريتم عدد مرفوع إلى قوة n = القوة n مضروبة بلوغاريتم العدد

$$Log(a)^n = nLoga$$

- لوغاريتم الجذر النوني لعدد ما = لوغاريتم العدد مقسوم على n

$$Log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} Loga$$

تحويل لوغاريتم من أساس إلى آخر

ليكن لدينا العدد N يمكن كتابته بشكلين : $N = 10^x = e^y$

نحسب لوغاريتم العدد بطريقتين مختلفتين :

$$Log_e N = y = xLog_e 10$$

$$Log_{10} N = x = yLog_{10} e$$

نحن نعلم بأن $L_e 10 \approx 2,3$ كذلك $L_{10} e \approx 0,43$

بحيث أن جداء العددين =1؛ $Log_{10} e \times L_e 10 = 1$

مثال : أحسب لوغاريتم العدد 1000 أساس e

نحن نعلم بأن $Log_{10} 1000 = 3$ إذن : $L_e 1000 = 3 \times 2,3 \approx 6,9$

تطبيق اللوغاريتمات

- توزيع باريتو للمداخيل معطاة بالدستور التالي : $N = \frac{A}{X^{\alpha}}$

بحيث أن αA هي ثوابت. N تمثل عدد الأشخاص اللذين يتقاضون دخلا أكبر أو يساوي x نستخدم اللوغاريتمات فنحصل على :

$$Log_{10} N = Log A - \alpha Log_{10} x$$

نفترض $A = 2 \cdot 10^9$ كذلك $\alpha = \frac{3}{2}$

- ما هو عدد الأشخاص N الذين يتقاضون دخلا أكبر أو يساوي $X \rangle 10^5$

- ما هو الحد الأدنى لمداخيل أغنى 100 شخص في الدولة.

الحل

$$LogN = LogA - \alpha Logx$$

$$LogN = Log 2 \cdot 10^9 - \frac{3}{2} Log 10^5$$

$$LogN = (9{,}3010) - 1{,}5(5) = 1{,}8010$$

من الجداول نستخرج قيمة $N \approx 63$ شخص.

$$Log 100 = Log(2 \cdot 10^9) - 1{,}5 Logx$$

$$1{,}5 Logx = 7{,}8010$$

إذن الحد الأدنى لمداخيل الأغنياء = 736000 دج = x

- أحسب المقادير التالية :

$$Log_3\left(\frac{1}{81}\right) = Log_3 (3)^{-4} = -4$$

$$Log_4\left(\frac{1}{16}\right) = Log_4(4)^{-2} = -2$$

$$Log_{10}(0,01) = Log_{10}(10)^{-2} = -2$$

الدالة اللوغاريتمية $y = L_e x$

- مجال التعريف : إن الأعداد الموجبة فقط تقبل لوغاريتما.

- مشتق الدالة : $y' = \frac{1}{x}$ لحسابه نتبع الخطوات التالية :

$$y = L_e x \qquad y + \Delta y = L_e(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = L_e(x + \Delta x) - L_e x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{L_e(x + \Delta x) - L_e x}{\Delta x}$$

يمكن كتابة الطرف الثاني من العلاقة على الشكل التالي :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} L_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

نفترض $m = \frac{\Delta x}{x}$ إذن نحصل على :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} L_e(1 + m)^{\frac{1}{m}}$$

إذا تناهت $\Delta x \to 0$ فالمقدار $(1+m)^{1/m} \to e$ أساس اللوغاريتم النيبيري. من المعلوم أن لوغاريتم الأساس =1. وفي الأخير نحصل على : $y' = \frac{1}{x}$

مشتق الدالة موجب على أساس $x \rangle 0$ إذن الدالة مستمرة ومتزايدة في المجال المذكور.

جدول تغيرات الدالة :

x	0		1		e		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

الدالة الأسية $y = e^x$

هي مقلوب الدالة اللوغاريتمية $y = L_e x$. هاتان الدالتان تقبلان الخط $y = x$ منصف الزاوية كخط متناظر.

- مشتق هذه الدالة هي الدالة ذاتها $y' = e^x$.

نحن نعلم بأن الدالة $y = e^x$ هي نفس الدالة $x = L_e y$

نحسب مشتق هذه الدالة اللوغاريتمية فنحصل على : $\frac{y'}{y} = 1$.

إذن $y' = y = e^x$

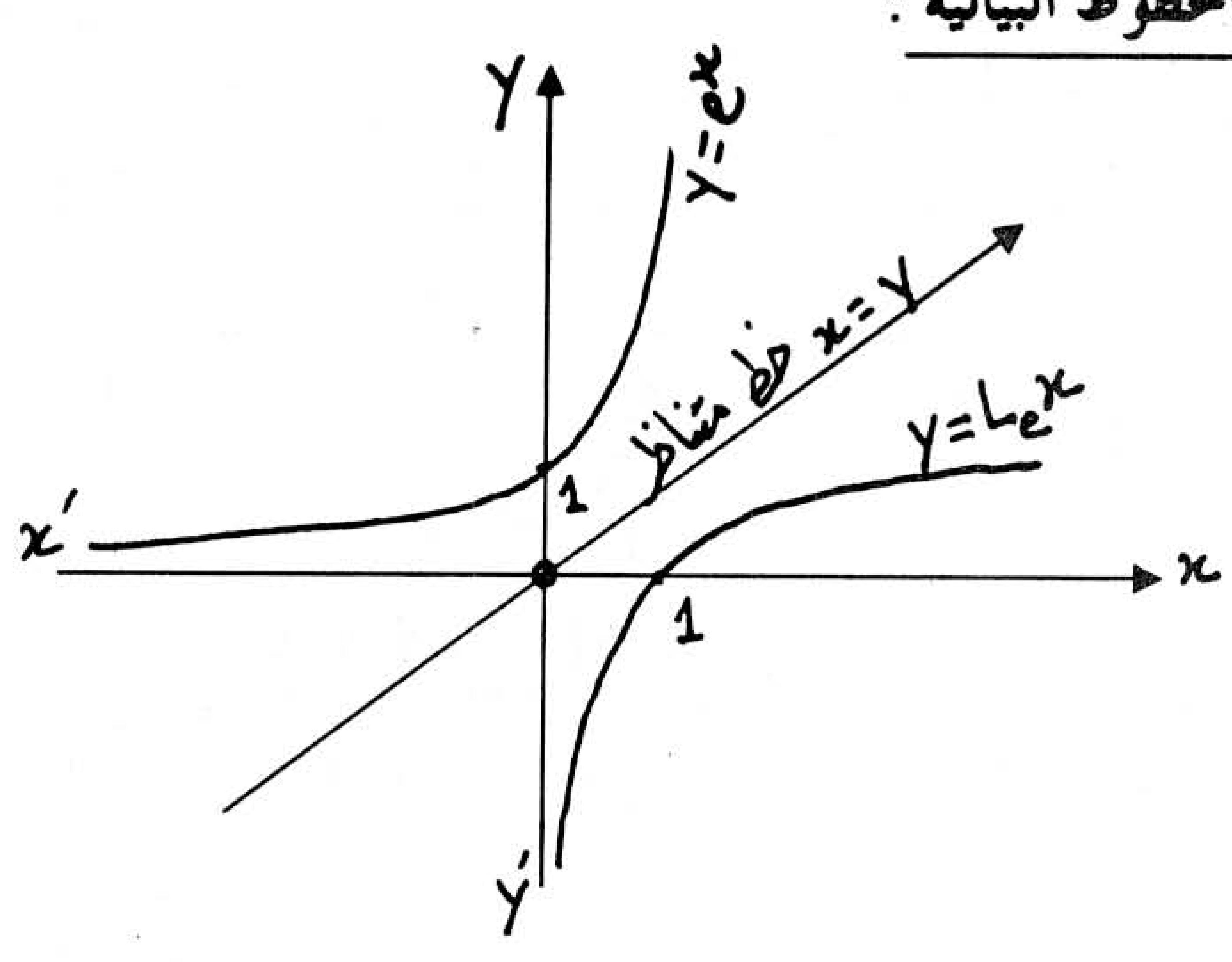
جدول تغيرات الدالة الأسية :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'	0	$+$	1	$+$	e	$+$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

ملاحظة : $L(e^x) = x$ ؛ $e(Lx) = x$

$e^{(x+y)} = e^x . e^y$

الخطوط البيانية :



تمارين على اللوغاريتمات

1- حل المعادلة : $2L_e(3x-4)+L_e(10x-4)=2L_e(5x-2)$

الحل

الأعداد الموجبة فقط لها لوغاريتم. فالكميات التالية يجب أن تكون موجبة.

$5x-2>0$ ؛ $10x-4>0$ ؛ $3x-4>0$ هذا يتطلب $x>\dfrac{4}{3}$

$$2L_e(3x-4)=L_e(3x-4)^2$$

$$2L_e(5x-2)=L_e(5x-2)^2$$

$$(3x-4)^2(10x-4)=(5x-2)^2$$

$$(5x-2)(18x^2-53x+34)=0$$

$18x^2-53x+34=0$ ؛ $5x-2=0 \Rightarrow x=2/5$

بما أن الشرط الأساسي $x>\dfrac{4}{3}$ فالقيمة $(x=2)$ مقبولة.

2- ما هي العلاقة التي تربط لوغاريتم المجموعات التالية :

$\frac{1}{\pi}$ و $\pi^3\sqrt{\pi^3}$ ، $\frac{1}{9}$ و 243.

$\frac{1}{3}$ و $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{2}/2$ و $2\sqrt{2}$.

$\frac{1}{\sqrt[5]{49}}$ و 49 ، 25 و 0,04.

الحل

$$\frac{Log_2 2\sqrt{2}}{Log_2 \sqrt{2}/2} = -3 \quad ; \quad \frac{Log_3 243}{Log_3 \frac{1}{9}} = -\frac{5}{2}$$

$$\frac{Log_\pi \pi\sqrt[3]{\pi^3}}{Log_\pi \frac{1}{\pi}} = -\frac{9}{2} \quad ; \quad \frac{Log_5(0,04)}{Log_5(25)} = -1$$

$$\frac{Log_7 49}{Log_7 \frac{1}{\sqrt[5]{49}}} = -5 \quad ; \quad \frac{Log_3 \sqrt{3}}{Log_3 1/3} = -\frac{1}{2}$$

3- لدينا الدالة : $f(x) = Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

برهن على أن : $f(x) + f(y) = f(z)$

علما بأن : $z = \frac{x+y}{1+xy}$

الحل

$$f(x) + f(y) = Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + Log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

نعوض $Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=Log\left[\frac{1+\frac{x+y}{1-xy}}{1-\frac{x+y}{1-xy}}\right]$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=\left(\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}\right)$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}$$

$\left[\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}\right]=\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}$ وهو المطلوب.

4- حل المعادلة التالية :

$$Log_a\sqrt{2x-3}=Log_a(6-x)-\frac{1}{2}Log_a x$$

<u>الحل</u>

$$Log_a\sqrt{2x-3}=Log_a\left(\frac{6-x}{\sqrt{x}}\right)\Rightarrow 6-x=\sqrt{x(2x-3)}$$

نربع الطرفين فنحصل على :

$$(6-x)^2=x(2x-3)\Rightarrow x^2+9x-36=0$$

الجذر الموجب فقط مقبول $x=3$

يفترض أن الكميات تحت الجذر يجب أن تكون موجبة.

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3\rangle 0 \Rightarrow x\rangle 3/2 \\ x\rangle 0 \ \ (6-x)\rangle 0 \Rightarrow x\langle 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \frac{3}{2}\langle x\langle 6$$

5- حل جملة المعادلتين لمجهولين :

$$\begin{cases} 5^{(x+y)} = 625 \\ 2^{xy} = 16 \end{cases}$$

الحل

$$625 = 5^4 \qquad 16 = 2^4$$

$$\left\{\begin{array}{l} 5^{x+y} = 5^4 \\ 2^{xy} = 2^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=4 \\ x\cdot y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

6- حل المعادلة التالية : $16^x + 16^{(1-x)} = 10$

الحل

نفترض $y = 16^x$ إذن $y + \dfrac{16}{y} = 10$

$$y^2 - 10y + 16 = 0 \Rightarrow y_1 = 8 \ ؛ \ y_2 = 2$$

$$16^x = 8 \Rightarrow 2^{4x} = 2^3 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = 3/4$$

$$16^x = 2 \Rightarrow 2^{4x} = 2^1 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = 1/4$$

الجواب : $x = 3/4$ كذلك $x = 1/4$

7- حل المعادلة التالية :

$$Log_q(x+3) + Log_q x(x+7) - Log_q(x+4)(x^2+4x+3) = 0$$

الحل

نلاحظ أن الأعداد الموجبة فقط تقبل لوغاريتما أي :

$x(x+7)\rangle 0$ ؛ $x+3\rangle 0$ ؛ $(x+4)(x^2+4x+3)\rangle 0$

$Log_a x(x+3)(x+7) = Log_a (x+4)(x+1)(x+3)$

نختصر بالمقدار $(x+3)$ فنحصل على :

$x(x+7) = (x+1)(x+4) \Rightarrow$

$x^2 + 7x = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow x = 2$

8- أحسب المقادير التالية :

$$Log_3 \frac{243\sqrt[5]{81}}{\sqrt[4]{27}} = Log_3 (3)^{\frac{101}{20}} \Rightarrow \frac{101}{20}$$

$$Log_2 \frac{64\sqrt[7]{256}}{\sqrt[8]{128}} = Log_2 (2)^{\frac{351}{56}} \Rightarrow \frac{351}{56}$$

$$Log_5 \frac{\sqrt[4]{125}\sqrt[3]{5}}{\sqrt[5]{5}} = Log_5 (5)^{-5/12} \Rightarrow -\frac{5}{12}$$

9- حل المعادلة التالية : $2Lx = L\left(x + \frac{11}{10}\right) + 1$

الحل

$$2Lx = L\left(x + \frac{11}{10}\right) + L10 = L10\left(x + \frac{11}{10}\right)$$

$$2Lx = Lx^2 = L(10x + 11)$$

نحصل على معادلة من الدرجة الثانية .

$$x^2 = 10x + 11 \Rightarrow x^2 - 10x + 11 = 0$$

جذور هذه المعادلة هي : $x_1 = 11$ و $x_2 = -2$

الأعداد السالبة ليس لها لوغاريتم. إذن $x_2 = -2$ مرفوض

الجواب $x = 11$

10- حل جملة المعادلتين لمجهولين : $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ Lx + Ly = 0 \end{cases}$

الحل

$$Lx + Ly = 0 \Rightarrow Lxy = 0 \Rightarrow xy = 1$$

$$\left.\begin{cases} x + 4y = 5 \\ xy = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 4 \Rightarrow y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

11- حل جملة المعادلتين لمجهولين : $\begin{cases} Lx - Ly = L10 \\ Lx^2 + Ly^2 = 1600 \end{cases}$

الحل

$$Lx - Ly = L\left(\frac{x}{y}\right) = L10 \Rightarrow \frac{x}{y} = 10$$

$$Lx^2 + Ly^2 = L\left(x^2 y^2\right) = L1600 \Rightarrow x^2 y^2 = 1600$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = 10 \Rightarrow x = 10y \\ x^2 y^2 = 1600 \Rightarrow xy = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x = 20 \qquad y = 2$$

12- حل المعادلة : $L_3\sqrt{x-1} - L_3\sqrt{x+1} = -1$

الحل

نطبق القواعد الخاصة باللوغاريتمات.

$$Log\left(\frac{a}{b}\right) = Loga - Logb \Rightarrow Log_3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -1$$

لكن -1 هو لوغ $\frac{1}{3}$

$$Log_3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = Log\frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{3}$$

نربع الطرفين فنحصل على :

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

13- برهن على أن $Log_4 16 = \dfrac{1}{Log_{16}4}$

الحل

$$\left.\begin{aligned} Log_4(16) &= Log_4(4)^2 = 2 \\ Log_{16}(4) &= Log_{16}(16)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

14- حل جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} xy = 256 \\ 3(Log_x y + Log_y x) = 10 \end{cases}$$

الحل

$$xy = 256 = 2^8 \Rightarrow Log_2(xy) = 8 = Logx + Logy$$

نفترض $X = L_2 x \qquad Y = L_2 y$

$$L_y(x) = \frac{L_2(x)}{L_2(y)} \qquad L_x(y) = \frac{L_2 y}{L_2 x}$$

إذن نحصل على جملة معادلتين لمجهولين.

$$\begin{cases} 3\left(\dfrac{X}{Y}+\dfrac{Y}{X}\right)=10 \\ X+Y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\left(X^2+Y^2\right)-10\times Y=0 \\ X+Y=8 \end{cases}$$

علينا أن نحسب عددين مجموعهما =8 والجداء =12

نحن أمام معادلة من الدرجة الثانية $Z^2-8Z+12=0$

جذور المعادلة هي : $Z_1=2$ ، $Z_2=6$ إذن نحصل على :

$$\begin{cases} X=6 \Rightarrow 2^6=64 \\ Y=2 \Rightarrow 2^2=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} X=2 \Rightarrow 2^2=4 \\ Y=6 \Rightarrow 2^6=64 \end{cases}$$

15- أحسب المقدار التالي :

$$\frac{Log\sqrt{12}+Log2+Log\sqrt{3}-Log9}{Log2-Log\sqrt{3}}$$

الحل

$$Log\sqrt{12}=Log\sqrt{3\times 4}=Log2+Log\sqrt{3}$$

$$A=\frac{Log2+Log\sqrt{3}+Log2+Log\sqrt{3}-2Log3}{Log2-Log\sqrt{3}}$$

الفصل السادس

المتواليات

مقدمة :

نرمز لكلمة متوالية بأنها مجموعة من الأعداد مرتبة حسب قانون معين يبين قيمة كل عدد من هذه المجموعة إذا علم الرقم الذي يحمله ضمن الترتيب المدروس. نسمي هذه الأعداد بحدود المتوالية ونرمز لها عادة بحرف واحد يضاف إليه رقم يدعى بالدليل يشعر بترتيبه. نسمي الحد العام a_n إذا استطعنا أن نبدل n بأي رقم من أرقام حدود المتوالية. تعرف المتوالية إما بالقانون الذي يكون حدودها المتتالية أو بالإفادة الجبرية لحدها العام a_n. مثال :

- إذا انتقلنا من الحد a_n إلى الحد a_{n+1} بإضافة كمية ثابتة r نحصل على متوالية حسابية.

- إذا انتقلنا من الحد a_n إلى الحد a_{n+1} بضربه بمقدار ثابت a_1 نحصل على متوالية هندسية.

يمكننا أن نعرف المتوالية التالية : $u_n = \frac{1}{u_{n-1}}$ وذلك بتعيين طريقة الانتقال من حد إلى حد يليه.

مثال : $u_1 = 1$ عندما نعطي $n = 1$ ثم $u_2 = 2$ عندما نعطي قيمة $n = 2$ ثم $u_3 = \frac{3}{2}$ عندما نعطي القيمة $n = 3 \Leftarrow u_3 = 1 + \frac{1}{2}$.

يمكننا تعريف متوالية بحدها العام $a_n = \frac{n}{n+1}$ وذلك بإعطاء قانون عام يعين لنا كل حد من حدود هذه المتوالية بعد معرفة رقمه. تكون حدود هذه المتوالية كالتالي : $u_1 = \frac{1}{2}$ ؛ $u_2 = \frac{2}{3}$ ؛ $u_3 = \frac{3}{4}$.

نقول عن متوالية بأنها متزايدة فيما إذا كان كل حد من حدودها أصغر من الحد الذي يليه. كما نقول عن المتوالية بأنها متناقصة في حالة العكس. مثال : $a_n = \frac{n}{n+1}$ هذه المتوالية متزايدة لأن $a_n \rangle a_{n+1}$.

المتوالية الحسابية

تحديدها : هي مجموعة من الأعداد المتتالية بحيث أن كل عدد يساوي العدد الذي يسبقه مضافا إليه مقدار ثابت يسمى أساس المتوالية. مثال الأعداد (7، 9، 11) تشكل متوالية حسابية أساسها 2 لأن 2 = 7-9 = 9-11.

- الحد النوني لمتوالية حسابية : إذا رمزنا للعدد الأول من متوالية حسابية بالحرف a وأساس المتوالية τ فالعدد الثاني $b = a + \tau$ والعدد الثالث $C = a + 2\tau$ والعدد ℓ الذي يكون ترتيبه n.

مثال 1: $a = 5$ ، $\tau = 2$ ، $n = 3$ ، $\ell = 9$

$$\ell = a + (n-1)\tau$$

- تعيين المتوالية الحسابية : تتعين المتوالية الحسابية متى علم حدان من حدودها، لأنه يمكننا أن نكون من المعاليم معادلتين خطيتين لمجهولين وبحلهما بتعين الحد الأول للمتوالية a وأساسها τ. مثال (1) لدينا متوالية حسابية، الحد الثالث = 12 والحد العاشر يساوي 33. أوجد الحد الأول a وأساس المتوالية τ.

الحل

المتوالية هي : $\left.\begin{matrix} a_3 = 12 = a_1 + 2\tau \\ a_{10} = 33 = a_1 + 9\tau \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 6 \\ \tau = 3 \end{cases}$ $\{6,9,12,15\}$

مثال (2) في متوالية حسابية : مجموع الحد الأول والثالث =16 ومجموع الحد الثاني والرابع يساوي 22 أوجد هذه المتوالية أي الحد الأول a وأساس المتوالية τ.

الحل

المتوالية هي : $\left\{\begin{matrix} a_1 + a_3 = 16 \\ a_2 + a_4 = 22 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a_1 = 5 \\ \tau = 3 \end{matrix}\right\}$ $\{5,8,11,14\}$

- خواص المتوالية الحسابية : كل عدد في متوالية حسابية يشكل وسطا حسابيا للعددين الذين يطوقانه. إذا كان لدينا الأعداد (a,b,c) تشكل متوالية حسابية فالعدد b هو وسط حسابي للعددين a ؛ c.

مثال : لدينا المتوالية الحسابية (11، 8، 5) إذن $8 = \frac{5+11}{2}$.

- مجموع أعداد متوالية حسابية : إذا رمزنا للعدد الأول (a) والعدد الأخير (ℓ) لمجموعة حسابية حدودها n، فمجموع هذه الأعداد :

$$S = \frac{n}{2}(a+\ell)$$

نكتب أعداد متوالية حسابية بشكلين مختلفين :

$$u_n = a, b, c \ldots\ldots\ldots\ldots k, \ell$$

$u_n = \ell, k, ...c, b, a$

نجمع العناصر المتناظرة فنحصل على : $2u_n = (a+\ell)+...(\ell+k)$

لكننا نلاحظ بأن : $(b+k)=(a+\ell)$

فالمتوالية مكونة من n عنصر إذن : $u_n = \frac{n}{2}(a+\ell)$

تطبيقات عملية

1) أحسب مجموع الأعداد الصحيحة $S = 1+2+3+.........+n$

نحن أمام متوالية حسابية العدد الأول : $a=1$ كما أن أساس المتوالية $\tau = 1$

إذن مجموع هذه الأعداد : $S = \frac{n}{2}(a+\ell)$

تطبيق عملي : ما هو مجموع الأعداد العشرة الأولى : $n = 10$.

مجموع هذه الأعداد $5(11) = S = 55 =$

2) مجموع الأعداد الزوجية : تشكل متوالية حسابية العدد الأول $a = 2$

وأساس المتوالية $\tau = 2$ إذن $S = \frac{n}{2}(2+2n) = n(n+1)$

تطبيق عملي : مجموع الأعداد الزوجية الخمسة الأولى $S = 30 =$

$$S = \frac{n}{2}(2+2n) = n(n+1) = 30$$

3) مجموع الأعداد الفردية : تشكل متوالية حسابية العدد الأول $a = 1$

والأساس $\tau = 3$ $\qquad S = \frac{n}{2}(1+2n-1) = n^2$

مثال : مجموع الأعداد الخمسة الأولى الفردية $n^2 = 25 =$

ملاحظة : لو جمعنا الأعداد الزوجية الخمسة الأولى والأعداد الفردية الخمسة الأولى لحصلنا على : 55=25+30 وهو مجموع الأعداد الصحيحة العشرة الأولى.

المتوالية الهندسية

تعريفها : يقال عن مجموعة أعداد بأنها تشكل متوالية هندسية إذا كان كل عدد يساوي العدد الذي يسبقه مضروبا بعدد ثابت يسمى أساس المتوالية يختلف عن الصفر $\tau \neq 0$. مثال الأعداد (16، 8، 4، 2) هذه الأعداد تشكل متوالية هندسية أساسها $\tau = 2$.

بوجه عام إذا رمزنا للعدد الأول a والأساس τ فالعدد الثاني $b = a\tau$ والعدد الثالث $e = a\tau^2$ والعدد الذي رتبته n يساوي :

$$e = a \cdot \tau^{n-1}$$

خواص المتوالية الهندسية

- كل عدد يشكل وسطا هندسيا للعددين الذين يطوقانه. فإذا كانت الأعداد (a, b, c) تشكل متوالية هندسية إذن $b^2 = a \times c$

مثال : الأعداد (4، 16، 64) إذن : $(16)^2 = 4(64) = 256$

- مجموع أعداد متوالية هندسية. إذا كان لدينا المتوالية الهندسية $(a, b, e............\ell)$ يمكن كتابة هذه المجموعة بشكلين مختلفين.

$$S = a + b + e............................+ k + \ell + m$$

$$S = m + \ell + k + ...e + b + a$$

نضرب المعادلة الثانية بأساس المتوالية τ ثن نطرح هذه المعادلة من المعادلة الأولى فنحصل على :

$$S - S\tau = a - a\tau^{n} \Rightarrow S(1-\tau) = a(1-\tau^{n}) \Rightarrow S = a\frac{\tau^{n}-1}{\tau-1}$$

إذا كان $\tau\langle 1$ يقال عن المتوالية الهندسية بأنها تنازلية.

$$\tau\langle 1 \Rightarrow \tau^{n} \rightarrow 0 \Rightarrow S = \frac{a}{1-\tau} \quad n\rightarrow\infty$$

وإذا كان $\tau\rangle 1$ يقال عن المتوالية الهندسية بأنها تصاعدية.

$$\tau\rangle 1 \Rightarrow \tau^{n} \rightarrow \infty \Rightarrow S \rightarrow \infty \quad n\rightarrow\infty$$

تطبيقات عملية

تمرين رقم 1 : لدينا متوالية هندسية أساسها $\tau = \frac{2}{7}$. لدينا مجموع الأعداد $S = 7$. ما هو العدد الأول ؟

الحل

$$S = \frac{a}{1-\tau} = 7 = \frac{a}{1-2/7} \Rightarrow a = 5$$

تمرين رقم 2 : أحسب مجموع الأعداد التالية :

$$S_7 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \dots\dots\dots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7$$

أحسب كذلك المجموع S_n، ما هو الخطأ الذي نرتكبه عندما نقرب S_7 بـــ S_n.

الحل

$$S_7=\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{15}{16}\left(\frac{2}{2-\sqrt{2}}\right)$$

$$S_n=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\dots\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$S_n-S_7=\left(2+\sqrt{2}\right)-\frac{15}{16}\left(2+\sqrt{2}\right)=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{16}\right)$$

عندما نقرب S_n بـــ S_7 نرتكب الخطأ التالي : $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{16}\right)$

تمرين رقم 3 : في متوالية حسابية مجموع الأعداد الخمسة الأولى =90 وكذلك مجموع الأعداد السبعة الأولى = 154.

السؤال : أحسب العدد الأول وأساس المتوالية ؟

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين، بحلهما نحصل على كافة العناصر :

$$\begin{cases}S_5=5a+10\tau=90\\ S_7=7a+21\tau=154\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=10 ، \tau=4\\ \{10,14,18\}\end{cases}$$

تمرين رقم 4 : أحسب مجموع أعداد المتوالية التالية : (30، x ...3 x ، 6)

الحل

قبل حساب المجموع يجب تحديد قيمة المجهول x.

نستطيع أن نستفيد من خواص المتواليات : $x + 3x = 6 + 30$

$$4x = 36 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow \tau = 9 - 6 = 3$$

إذن أساس المتوالية $\tau = 9 - 6 = 3$ ومنه نحصل على المجموع :

$$S = \frac{n}{2}(a + \ell) = \frac{9}{2}(6 + 30) = 162$$

تمرين رقم 5 : الحد العاشر من متوالية حسابية يساوي $a_{10} = 43$ والنسبة ما بين الحد الثالث والخامس يساوي $\frac{a_3}{a_5} = \frac{4}{9}$.

السؤال : ما هي حدود هذه المتوالية الحسابية ؟

الحل

$$18\tau + 9a_1 = 16\tau + 4a_1$$

$$\begin{cases} a_{10} = a_1 + 9\tau = 43 \\ \dfrac{a_3}{a_5} = \dfrac{a_1 + 2\tau}{a_1 + 4\tau} = \dfrac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow 5a_1 = -2\tau \Rightarrow$$

$$a_1 = -\frac{2}{5}\tau$$

$$43 = -\frac{2}{5}\tau + 9\tau$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على كافة العناصر $\begin{cases} a_1 = -2 \\ \tau = 5 \end{cases}$

المتوالية هي : (13، 8، 3، 2-).

تمرين رقم 6 : ثلاث أعداد تشكل متوالية حسابية مجموعها $S = 24$
إذا طرحنا العدد (1) من الحد الأول والعدد (2) من الحد الثاني لحصلنا على متوالية هندسية. ما هي حدود هذه المتوالية ؟

الحل

$$S = a + b + c = 24 = 3(a + \tau) \Rightarrow b = 8$$

حسب معطيات المسألة، الأعداد التالية تشكل متوالية هندسية.

إذن C ؛ $(b-2)$ ؛ $(a-1)$

$$(b-2)^2 = c(a-1) = 36 \Rightarrow c = 16 - a$$

$$(16-a)(a-1) = 36 \Rightarrow \begin{cases} a = 13 \\ a = 4 \end{cases}$$

وهكذا نحصل على عناصر المتوالية (12، 8، 4) أو (3، 8، 13).

تمرين رقم 7 : إنتاج شركة في السنة الأولى = 700 وحدة. وفي السنة الخامسة 1500 وحدة. ما هو معدل نمو الشركة ؟

الحل

نطبق الدستور : $\ell = a + (n-1)\tau \Rightarrow \tau = \dfrac{\ell - a}{n-1}$

نحصل على : $\tau = \dfrac{1500 - 700}{5-1} = \dfrac{800}{4} = 200$

تمرين رقم 8 : إذا كان إنتاج شركة في السنة الأولى يساوي 10000 وحدة ثم ينخفض هذا الإنتاج كل عام 500 وحدة.

<u>السؤال</u> : متى ينعدم إنتاج هذه الشركة ؟

<u>الحل</u>

نطبق الدستور $\ell = a + (n-1)\tau$

حسب عناصر المسألة : $\ell = 0$ ، $a = 10000$ ، $\tau = -500$

المجهول n يمثل عدد السنين. نحصل على قيمة n من المعادلة التالية :

$$(n-1)\tau = \ell - a \Rightarrow (n-1) = \frac{1}{\tau}(\ell - a)$$

$$(n-1) = \frac{-10000}{-500} = 20 \Rightarrow n = 21$$ عام

<u>تمرين رقم 9</u> : مجموع ثلاثة حدود في متوالية هندسية $= 14 = S$

فإذا زدنا كل من الحد الأول والثاني بمقدار واحد وأنقصنا الحد الثالث بمقدار (1) لحصلنا على متوالية حسابية. ما هي الحدود الثلاثة ؟

<u>الحل</u>

نفترض a الحد الأول وكذلك τ أساس المتوالية :

مجموع عناصر المتوالية الهندسية $= 14 = S = a(1 + \tau + \tau^2) = 14$

الحد الأوسط لمتوالية حسابية هو وسط حسابي ما بين العددين الذين يطوقانه

$$(a\tau + 1) = (a\tau^2 - 1) + (a + 1) = \frac{a}{2}(\tau^2 + 1)$$

$$2(a\tau + 1) = a(\tau^2 + 1)^2 \Rightarrow$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على :

$$\begin{Bmatrix} a\tau^2 - 2a\tau + a = 2 \\ a\tau^2 + a\tau + a = 14 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a\tau = 4 \\ 4\tau^2 - 10\tau + 4 = 0 \end{cases}$$

الحد الأول من المتوالية : $a_1 = 2$ أو $a_2 = 8$

أساس المتوالية : $\tau_1 = 2$ أو $\tau_2 = \frac{1}{2}$

المتوالية الهندسية هي : (8، 4، 2) أو (2، 4، 8).

المتوالية الحسابية هي : (7، 5، 3) أو (1، 5، 9).

تمرين رقم 10 : مجموع الحدين الأول والثاني في متوالية هندسية تنازلية يساوي $\frac{5}{4}$. ومجموع كافة حدودها = $S = \frac{9}{4}$

السؤال : ما هي الحدود الثلاثة الأولى لهذه المتوالية ؟

الحل

نفترض a الحد الأول. نفترض τ أساس المتوالية.

مجموع الحد الأول والثاني : $a + a\tau = a(1+\tau) = \frac{5}{4}$

مجموع كافة الحدود = $S = \frac{a}{1-\tau} = \frac{9}{4}$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على :

$$\begin{cases} 4a = 9(1-\tau) \\ a(1+\tau) = 5/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5/4}{1+\tau} \\ 1-\tau^2 = \dfrac{5}{9} \Rightarrow \tau^2 = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

أساس المتوالية = $\tau = \pm\frac{2}{3}$

الحد الأول للمتوالية = $a = \pm\frac{3}{4}$ — الحدود الأولى هي $\left\{\frac{3}{4} ؛ \frac{1}{2} ؛ \frac{1}{3}\right\}$

الفصل السابع

التكامل

ليكن التابع $y=f(x)$ نسمي التابع الأصلي كل تابع يقبل $f(x)$ مشتقا له. فإذا كانت الدالة $g(x)$ تابعا أصليا للدالة $f(x)$ وجب أن يكون $g'(x)=f(x)$.

ويكون أيضا $g(x)+c$ تابعا أصليا $f(x)$ بحيث أن c عدد ثابت. فإذا كان لتابع ما $f(x)$ تابع أصلي فإن له عدد غير متناهي من التوابع الأصلية تختلف عن بعضها بعدد ثابت. نرمز للتابع الأصلي $f(x)$ بالشكل : $\int f(x)dx=g(x)+c$.

يدعى الرمز الموجود بالطرف الأول بالتكامل الغير محدود للتفاضل $f(x)dx$ ونقول أن التابع $f(x)$ موضوع تحت إشارة التكامل. يدعى العدد الثابت c الذي يضاف دوما إلى التابع الأصلي بثابت التكامل.

إن عملية التكامل هي العملية المعاكسة لعملية التفاضل. وإيجاد التابع الأصلي هو عمل معاكس لإيجاد المشتق. لذا يمكننا أن نستنتج من جدول المشتقات جدول التكامل فنحصل على :

$$\int dx = x + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = Lx + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$$

خواص التكامل غير المحدود

إن عملية التكامل هي العملية المعاكسة لعملية التفاضل. من المعقول أن يقابل كل خاصة من خواص التفاضل خاصة مشابهة للتكامل.

* الضرب بعدد ثابت : إذا كان للتابع $g(x)$ تفاضلا $f(x)dx$ فإن تفاضل $kg(x)$ حيث أن k عدد ثابت هو $kf(x)dx$ إذن :

$$k\int f(x)dx = \int kf(x)dx = kg(x)$$

* إذا كان للتوابع $F(x)$ $G(x)$ $H(x)$ تفاضلات هي :

$f(x)dx, g(x)dx, h(x)dx$ فإن تفاضل مجموع هذه التوابع أي تفاضل المقدار

$$[F(x)+G(x)+H(x)]' = f(x)dx + g(x)dx + h(x)dx$$

ومنها نستنتج : $\int[f(x)dx + g(x)dx + h(x)dx] =$

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx + \int h(x)dx$$

تكامل مجموع التوابع يساوي مجموع تكاملات هذه التوابع.

* استعمال تابع مساعد:

نفترض : $I = \int e^{ax} dx = \int \frac{e^{ax}}{a} d(ax) = \frac{e^{ax}}{a} + c$

$$J = \int Sinaxdx = \frac{Cos(ax)}{a} + c \quad \left\{\begin{matrix} u = ax \\ du = adx \end{matrix}\right\}$$

$$K = \int Cos^2 xdx = \int \frac{1 + Cos2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + Cte$$

$$L = \int \sin^2 xdx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + Cte$$

$$M = \int tgxdx = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -L|\cos x| + Cte$$

الطرق العامة في التكامل

إذا كنا أمام تكامل نريد حسابه ننظر أولا فيما إذا كان التابع المراد استكماله مشتقا لتابع معروف ونستنتج عندها التابع الأصلي مباشرة. أما إذا لم يكن ذلك ممكنا فإننا نعمد إلى بعض الطرق التي تعيد التكامل المفروض إلى تكامل معروف وموجود في الجدول الذي أثبتناه في الأول.

1- طريقة تغيير المتحول Changement de variable

مثال (1) :

$$I = \int \frac{5x^3 dx}{9 + x^4} \qquad \left.\begin{matrix} u = 9 + x^4 \\ du = 4x^3 dx \end{matrix}\right\} \text{نفترض}$$

$$I = \frac{5}{4} \int \frac{du}{u} = \frac{5}{4} Log|u| + c = \frac{5}{4} L|9 + x^4| + c$$

مثال (2) :

نفترض $\left.\begin{array}{l} u = 1 - x^2 \\ du = -2xdx \end{array}\right\}$ $\qquad J = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$J = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$$

مثال (3) :

نفترض $\left.\begin{array}{l} u = 4x^2 \\ du = 8xdx \end{array}\right\}$ $\qquad K = \int e^{4x^2} \cdot xdx$

$$K = \int \frac{e^u}{8} du = \frac{1}{8} e^u + c = \frac{1}{8} e^{4x^2} + c$$

مثال (4) :

نفترض $\left.\begin{array}{l} u = 1 + x^2 \\ du = 2xdx \end{array}\right\}$ $\qquad L = \int \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$

$$L = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2\left(1+x^2\right)} + Cte$$

مثال (5) :

نفترض $\left.\begin{array}{l} u = ax + b \\ du = adx \end{array}\right\}$ $\qquad M = \int (ax+b)^n dx$

$$M = \int \frac{u^n du}{a} = \frac{1}{a}\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

$$M = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

2– التكامل بالتجزئة Intégration par partie

تستند هذه الطريقة على المبدأ التالي : إذا كان العنصر التفاضلي في التكامل $f(x)dx$ من الشكل udu أو يمكن وضعه بهذا الشكل فإنه يمكننا الإستفادة من العلاقة التالية :

$$d(u\cdot v)=udv+vdu$$

$$udv=d(u\cdot v)-vdu$$

نأخذ تكامل الطرفين فنحصل على : $\int udv=u\cdot v-\int vdu$

هذا هو الدستور الذي تستند عليه طريقة التكامل بالتجزئة.

إذا أحسن اختيار التابعين vu فإننا ننتقل من حساب التكامل $\int udv$ إلى حساب التكامل $\int vdu$ الذي يكون حسب اختيار v,u أقل صعوبة من الأول.

مثال : أحسب تكامل الدالة $I=\int xe^x dx$

نفترض $u=x$ كذلك $dv=e^x dx$. إذن $du=dx$ كذلك $v=e^x$

$$I=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x=e^x(x-1)+c$$

مثال : $J=\int x^2e^x dx$

نفترض
$$\begin{cases} u=x^2 \\ du=2xdx \\ v=e^x \\ dv=e^x dx \end{cases}$$

$$J=x^2e^x-\int e^x 2xdx$$

$$J=x^2e^x-2\int xe^x dx$$

$$J=x^2e^x-2e^x(x-1)+c$$

مثال : $K=\int x\sin x dx$

$$K = -x\cos x - \int \cos x dx$$

$$K = -x\cos x + \sin x + c$$

نفترض $\left.\begin{matrix} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{matrix}\right\}$

التكاملات الكسرية

الهدف هو التوصل إلى حساب التكامل من الشكل $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$

نقوم بحساب التكامل الكسري على تفريق الكسر المراد إيجاد تابعه الأصلي إلى مجموع كسور بسيطة.

مثال رقم 1 : $I = \int \frac{6x-22}{x^2-4x+15} dx$

$$\frac{6x-22}{x^2-4x+15} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-5}$$

$$\begin{cases} x = 5 \Rightarrow B = 4 \\ x = 3 \Rightarrow A = 2 \end{cases}$$

$$I = 2\int \frac{dx}{x-3} + 4\int \frac{dx}{x-5} = 2L(x-3) + 4L(x-5) + Cte$$

مثال رقم 2 : $J = \int \frac{5x-9}{x^2-1} dx$

$$\frac{5x-9}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow B = -2 \\ x = -1 \Rightarrow A = 7 \end{cases}$$

$$J = \int \frac{5x-9}{x^2-1} = 7\int \frac{dx}{x+1} - 2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$J = 7Log|x+1| - 2Log|x-1| = L\frac{(x+1)^7}{(x-1)^2} + c$$

مثال رقم 3 : $K = \int \frac{x^2 + 6x + 7}{(x-4)^3} dx$

نفترض $\left.\begin{array}{l} u = x-1 \\ x = u+1 \\ dx = du \end{array}\right\}$

$$K = \int \frac{u^2 + 8u + 14}{u^3} du$$

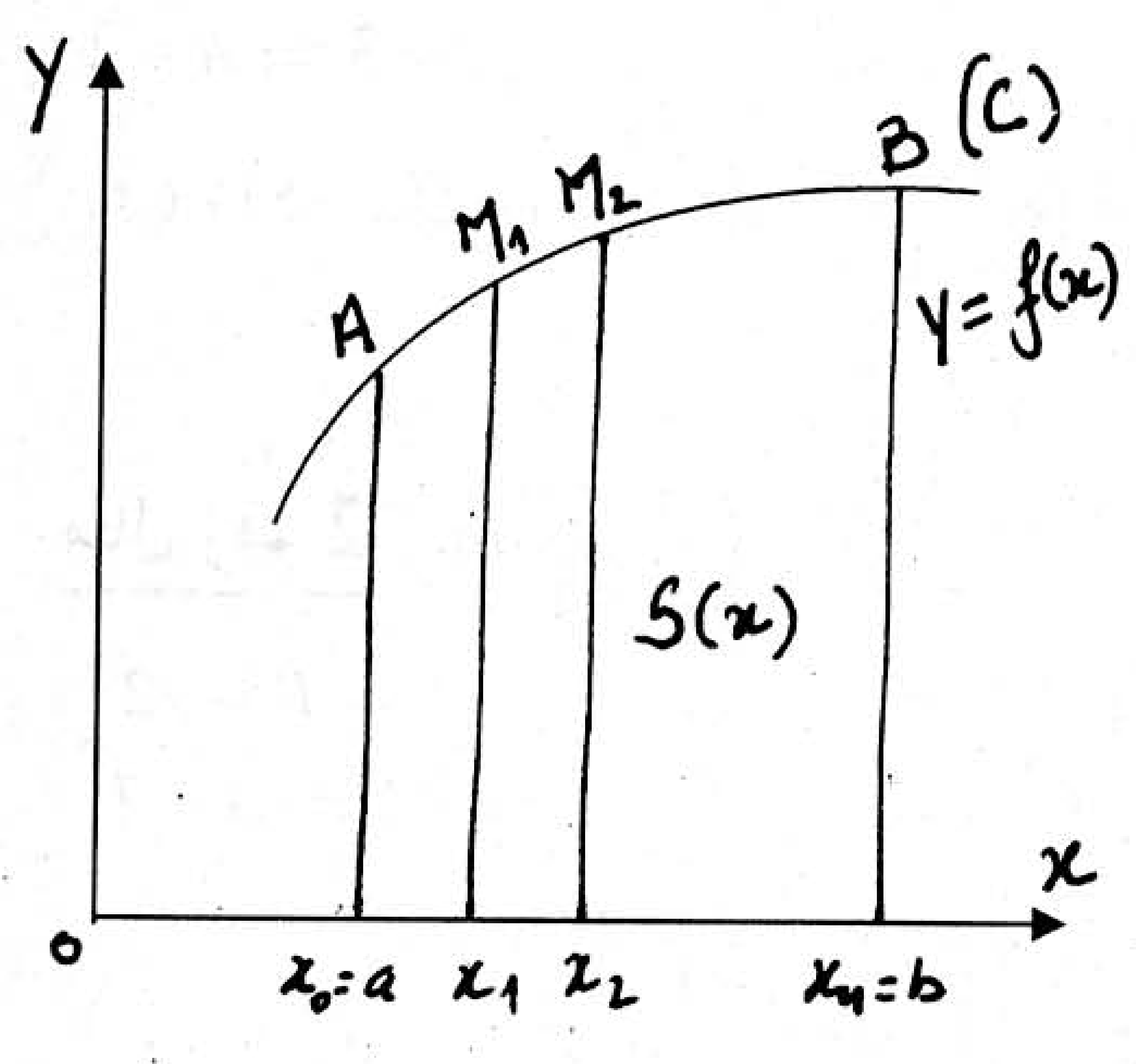
$$K = \int \frac{du}{u} + 8\int \frac{du}{u^2} + 14\int \frac{du}{u^3}$$

$$K = \int \frac{dx}{x-1} + 8\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 14\int \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$K = L(x-1) - \frac{8}{x-1} - \frac{28}{(x-1)^2} + c$$

التكامل المحدود

ليكن التابع $y = f(x)$ تابعا موجبا ومتزايدا في المجال (a,b) بحيث أن $a \langle b$ نحسب السطح المحصورما بين الخط البياني AB للتابع في المجال المذكور وبين محور السينات من جهة.



والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ الموازيين لمحور العينات من جهة أخرى. نقسم المجال (a,b) بنقاط فواصلها هي : ax_1x_2b وبذلك ينقسم المجال إلى n مجال جزئي. نقيم من هذه النقاط . أعمدة على محور السينات فتتلاقى

مع المنحنى AB في النقاط AM_1M_2B . نبحث عن قيمتين تقريبيتين للسطح المذكور A_1 بالنقصان أو A_2 بالزيادة. أما قيمة A_1 فتساوي سطوح المستطيلات قاعدها x_0x_1 وأطوالها $f(x_0)$ و $f(x_1)$. أما قيمة A_2 فهي مجموع السطوح التي تكون قاعدها نفس قواعد المستطيلات السابقة أما أطوالها فهي : $f(x_1)$ و $f(x_2)$ $\qquad A_1 \langle S(x) \rangle A_2$

السطح S هو نهاية كل من A_1 و A_2 عندما ينتهي عدد المجالات الجزئية إلى اللانهاية بحيث يصبح طول كل مجال جزئي لا متناهي في الصغر ويتم ذلك بتقسيم كل مجال جزئي x_0 ؛ x_1 إلى مجالات جديدة إلخ ... فالمجال $x_i - x_{i-1}$ يتناهى إلى dx عندما $n \to \infty$ إذن $S = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ التكامل المحدود ما هو إلا مجموع عدد غير متناهي من الكميات $f(x)dx$ والتي تمثل سطوح مستطيلات طول قاعدة كل منها dx وأطوالها قيم $f(x)$ المختلفة على المجال (a,b) ممتدة على طول المجال المذكور. هذا المجموع يمثل قيمة السطح الواقع بين المنحنى ومحور السينات والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ الموازيين لمحور العينات. $\int_a^b [f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)]_a^b$

مثال : أحسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع $y = x^2$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$ الموازيين لمحور العينات.

الحل : قيمة السطح معطاة بالدستور $S = \int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

مثال : أحسب مساحة السطح $S = \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \left[\frac{1}{2}L(1+x^2)\right]_0^1$

الحل : $= \frac{1}{2}L2 - \frac{1}{2}L1 = \frac{1}{2}L2 = L\sqrt{2}$

خواص التكامل المحدود

1- إذا بادلنا بين حدي تكامل محدود تغيرت إشارة هذا التكامل.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2- إذا جزئنا المجال (a,b) إلى جزئين (c,b) (a,c) فالسطح المحصور S بين الخط البياني للتابع $y = f(x)$ والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ يساوي مجموع السطحين. $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$

تمارين على التكامل

1- أحسب تكامل الدالتين التاليتين :

$$I = \int_1^e xLxdx = \left[\frac{x^2}{2}Lx\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

$$J = \int_1^e x(Lx)^2dx = \left[(Lx)^2 - L(x) + \frac{1}{2}\right]_1^e = \frac{1}{4}(e^2-1)$$

$$I + J = \frac{e^2}{2} \quad , \quad I - J = \frac{1}{2}$$

2- لدينا مجموع أعداد متوالية جسابية $S = \frac{n}{2}[2a+(n-1)\tau]$

برهن على أن هذا المجموع يساوي $I = \int_0^n \left[\tau x + \left(a - \frac{\tau}{2}\right)\right] dx$

الحل

$$I = \left[\tau \frac{x^2}{2} + ax - \frac{\tau x}{2}\right]_0^n = \tau \frac{n^2}{2} + an - \tau \frac{n}{2} =$$

$$\frac{n}{2}\left[\tau n + 2a - \tau\right] = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\tau\right]$$

3- أحسب المساحة المحصورة منا بين المنحنيين : $\begin{cases} y_1 = -\frac{7}{8}x^2 + \frac{15}{8}x \\ y_2 = \frac{1}{x^2} \end{cases}$

الحل

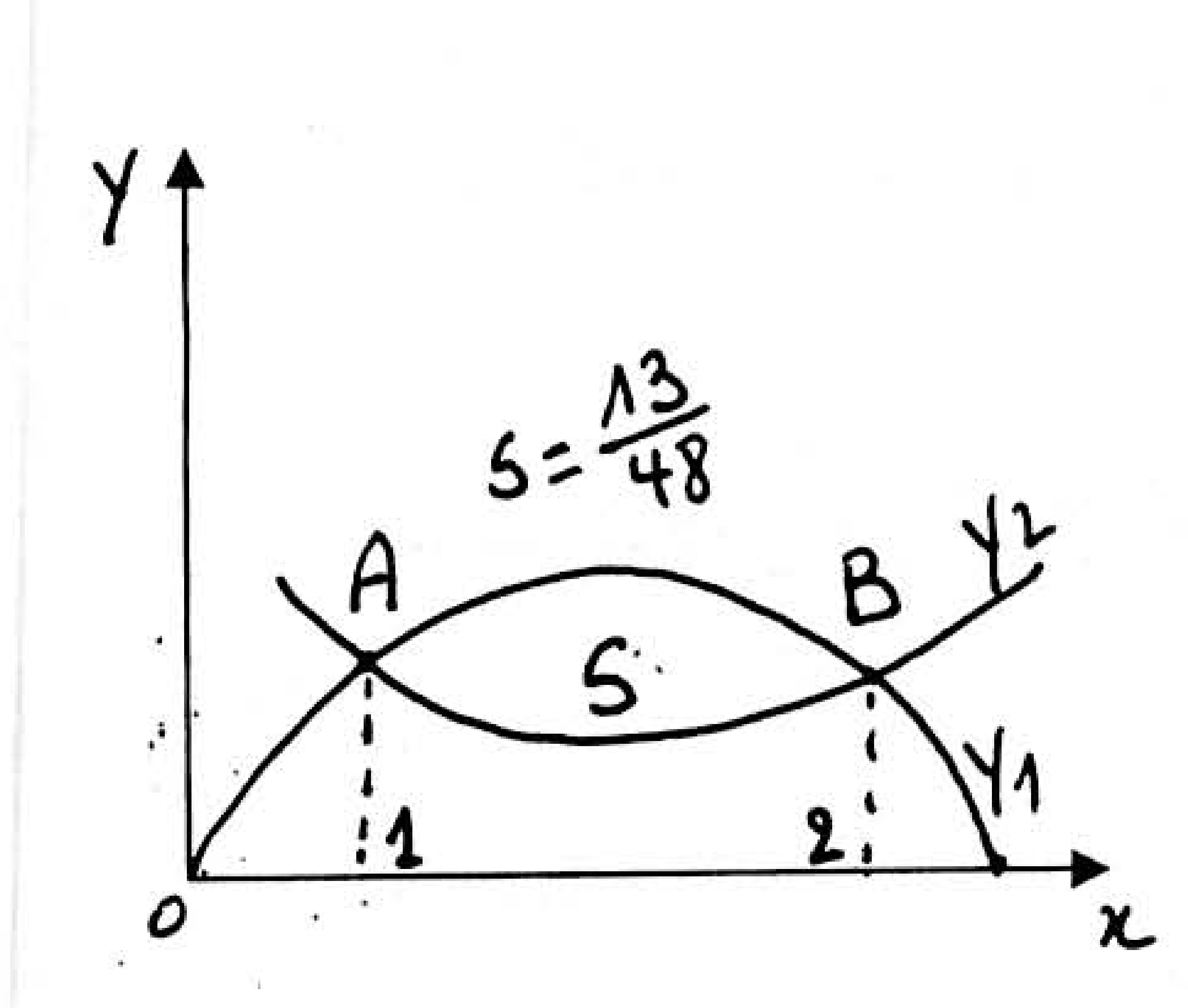
نرسم المنحنيين. يتقاطعان في

النقطتين $\begin{cases} A(x=1) \\ B(x=2) \end{cases}$

$$S = \int_1^2 (y_1 - y_2) dx$$

$$S = \int_1^2 \left(-\frac{7x^2}{8} + \frac{15x}{8} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$S = \left[-\frac{7}{8} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{15}{8} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{13}{48}$$



4- أحسب تكامل الدالتين التاليتين :

$$I = \int e^{x} \sin x dx$$

$$J = \int e^{x} \cos x dx$$

الحل

نفترض $\left.\begin{matrix} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{matrix}\right\}$ $\quad$ $\begin{matrix} v = e^{x} \\ dv = e^{x} dx \end{matrix}$

$$\left.\begin{matrix} I = e^{x} \sin x - \int e^{x} \cos x dx \\ J = e^{x} \cos x + \int e^{x} \sin x dx \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$I + J = e^{x} \sin x \quad , \quad I - J = e^{x} \cos x$$

نحن أمام جملة كعادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على :

$$I = \frac{e^{x}}{2}(\sin x - \cos x) \qquad J = \frac{e^{x}}{2}(\sin x + \cos x)$$

5- أحسب تكامل الدالة : $I = \int \frac{11x - 20}{x^2 - 5x + 4} dx$

الحل

يمكن حساب التكامل عن طريق تحليل كسر إلى كسور بسيطة من الدرجة الأولى :

$$\frac{11x - 20}{x^2 - 5x + 4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} \Rightarrow A(x-4) + B(x-1) = 11x - 20$$

عندما نعطي : $\begin{cases} A = 3 \Leftarrow x = 1 \\ B = 8 \Leftarrow x = 4 \end{cases}$ ومنها نجد :

$$I = 3\int \frac{dx}{x-1} + 8\int \frac{dx}{x-4} = 3Log(x-1) + 8Log(x-4)$$

$$I = Log(x-1)^{3}(x-4)^{8} + C$$

6- أحسب تكامل الدالتين التاليتين :

$$I = \int x \sin x dx$$

$$J = \int x \cos x dx$$

الحل

$$I = \sin x - x\cos x + Cte$$

$$J = x\sin x + \cos x + Cte$$

7- أحسب التكامل : $I = \int \frac{x^2+3x+7}{x^2+9x+14}dx$

الحل

$$I = 1 - \left(\frac{6x+7}{x^2+9x+14}\right)dx = 1 - \left[\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+7}\right]dx$$

$$A(x+7) + B(x+2) \equiv 6x+7$$

عندما نعطي : $A = -1 \Leftarrow x = -2$

$$B = 7 \Leftarrow x = -7$$

$$I = \int\left[1 + \frac{1}{x+2} - \frac{7}{x+7}\right]dx = x + L(x+2)$$

$$-7L(x+7) + c \Rightarrow I = x + L\frac{x+2}{7(x+7)} + Cte$$

8- أحسب التكامل : $I = \int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$

الحل

$$I=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}\Rightarrow$$

$$A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)=1$$

$$A(x^2+3x+2)+B(x^2+2x)+C(x^2+x)=1$$

نكتب المعادلات التالية :

$$\begin{cases}A+B+C=0\\3A+2B+C=0\\2A=1\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}x^2(A+B+C)=0\\x(3A+2B+C)=0\\2A=1\end{matrix}$$

$$\left\{A=\frac{1}{2}\ ,\ B=-1\ ,\ C=\frac{1}{2}\right\}$$

$$I=\int\frac{dx}{2x}+\int\frac{dx}{2(x+2)}-\int\frac{dx}{x+1}\Rightarrow I=\frac{1}{2}Lx$$

$$-L(x+1)+\frac{1}{2}L(x+2)\Rightarrow I=\frac{\sqrt{x(x+2)}}{x+1}+Cte$$

9- أحسب التكامل : $I=\int\frac{dx}{x^2-a^2}$

الحل

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right]$$

$$I=\frac{1}{2a}\left[L(x-a)-L(x+a)\right]+Cte$$

$$I=\frac{1}{2a}L\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+Cte$$

10- أحسب التكامل : $I = \int \frac{2x+1}{(x-2)^3} dx$

الحل

$$\frac{2x+1}{(x-2)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$$

$$(2x+1) = A(x-2)^2 + B(x-2) + C = Ax^2 + (B-4A)x + (4A-2B+C)$$

نطابق ما بين حدود الطرفين فنحصل على :

-5　-2　-0

$$\begin{cases} A = 0 \\ B - 4A = 2 \\ 4A - 2B + C = 1 \end{cases} \quad I = \int \frac{2x+1}{(x-2)^3} dx = 2\int \frac{dx}{(x-2)^2} + 5\int \frac{dx}{(x-2)^3}$$

$$I = -\frac{2}{x-1} - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)^2 + Cte$$

11- أحسب تكامل الدالة : $I = \int \frac{2x+1}{x(x+3)^2} dx$

الحل

$$I = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+3)} + \frac{C}{(x+3)^2}$$

$$2x+1 = A(x+3)^2 + Bx(x+3) + Cx$$

$$2x+1 = (A+B)x^2 + (6A+2B+C)x + 9A$$

نطابق ما بين الطرفين فنحصل على :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 6A + 3B + C = 0 \\ 9A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{9} \quad B = -\frac{1}{9} \quad C = \frac{5}{3}$$

$$I=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{(x+3)^2}$$

$$I=\frac{1}{9}Lx-\frac{1}{9}L(x+3)-\frac{5}{3(x+3)}+Cte$$

12- أحسب التكامل : $I=\int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$

الحل

نحن نعلم بأن $x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$

إذن : $\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$

$$2x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$$

إذا أعطينا :

$$A=-\frac{3}{2}\Leftarrow x=0$$

$$B=+\frac{5}{2}\Leftarrow x=1$$

$$C=-\frac{1}{6}\Leftarrow x=-2$$

$$I=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+2}+Cte$$

$$I=-\frac{3}{2}Lx+\frac{5}{3}L(x-1)-\frac{1}{6}L(x+2)$$

$$I=L\frac{(x-1)^{5/3}}{x^{3/2}(x+2)^{1/6}}+Cte$$

الفصل الثامن

المثلوية

القسم الأول : البرمجة الخطية

تحديدها : هي عبارة عن أسلوب رياضي يمكن الالتجاء إليه لإيجاد الحلول المثلى للمشاكل الإقتصادية.

لو نظرنا إلى العملية الإنتاجية لوجدنا أنه يمكن في حالات عديدة الحصول على منتج معين بعدة طرق تقنية مختلفة. إذن لكل منتج عدد كبير من الحلول ابتداء من اختيار المواد الأولية وانتهاء بطريقة نقل وتوزيع المنتجات للمستهلكين. إن إدارة المشروع تواجه باستمرار مشاكل إنتاجية مختلفة تتطلب غالبا اختيار الحل الأمثل ضمن مجموعة كبيرة من الحلول. من الطبيعي أن هذه الحلول المختلفة تتطلب نفقات مختلفة وتؤدي إلى الحصول على مفعول إقتصادي متباين. فلو تمكنا من حساب النفقات المطلوبة لكل حل ممكن لكان من السهل انتقاء الحل الأفضل عن طريق مقارنة تكاليف كل حل ونتائجه واختيار الحل الذي يعطي أكثر مفعول إقتصادي. ونسمي أفضل حل ممكن بالحل المثالي أو البرنامج المثالي وهو الخطة التي تضمن الحصول على النتائج الإنتاجية المطلوبة بأقل تكاليف أو الحصول على أكبر مفعول إنتاجي لاستعمال موارد محدودة. وهنا يبدأ دور البرمجة الخطية التي تمد الإدارة بالأساليب الرياضية التي تجعل إيجاد الحل المثالي عملا سهلا وبسيطا. إن

المشاكل التي يمكن حلها باستخدام أسلوب البرمجة الخطية يجب أن تحتوي على :

* **الهدف** : تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف. إن أغلب المشاكل الاقتصادية تبحث عن الحد الأقصى للربح أو الحد الأدنى للنفقة الكلية.

* **قيود المسألة** : وهي مجموعة المعادلات والمتباينات التي تمثل الظروف أو الشروط الواجب مراعاتها عند حل المسألة : مثلا : حجم الإنتاج يتعلق بكمية المواد الأولية المتوفرة وساعات العمل المتاحة.

* **عدم سالبية القيم** : إن البرمجة الخطية لا يقتضي استعمالها على المسائل الاقتصادية بل تمتد فائدتها إلى نواحي أخرى، مثلا تغذية المرضى في المستشفيات حيث يكون الهدف تأمين سعرات حرارية لكل مريض لا تقل عن مقدار معين باستخدام أنواع معينة من الأغذية. كذلك تغذية المواشي حيث يكون الهدف زيادة وزنها إلى أكبر قدر ممكن باستخدام أنواع معينة من المواد الغذائية المتاحة.

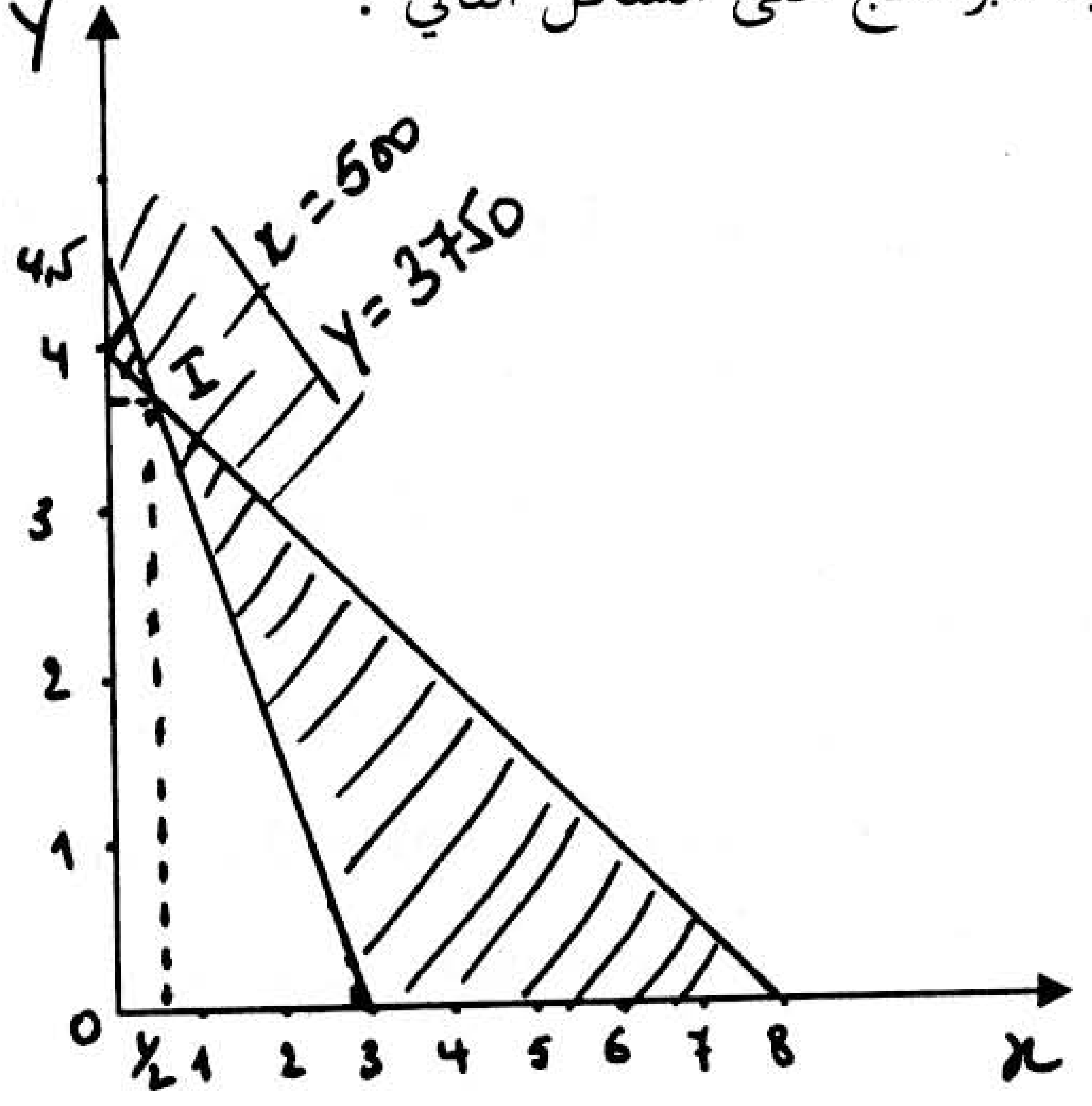
عندما يكون هناك قيد واحد فقط تكون مواجهة المشكلة سهلة إلى حد ما حيث يمكن الاستعانة بتركيب الدوال التي تتضمن هذا القيد باستخدام مضاعف لاغرانج ثم حساب المشتقات الجزئية ونعدمها ثم تحديد قيم المتغيرات التي تحقق النهاية العظمى أو الصغرى. أما عندما تتعدد القيود ويصبح من غير الممكن الإستعانة بهذا النوع من التحليل لرياضي نلجأ إلى البرمجة الخطية حيث تكون أكثر سهولة في مواجهة المشكلة موضوع البحث. كذلك يمكن الاعتماد على الرسم البياني طالما أن الدراسة تقتصر على متغيرين فقط.

تطبيق عملي : ينتج مشروع سلعتين A وB الكميات المنتجة x و y.

يحقق المشروع ربحا على كل وحدة منتجة قدره 2,5دج على السلعة الأولى و2دج على السلعة الثانية.

دالة الهدف : $P = 2{,}5x + 2y$. هذه الدالة يجب تعظيمها يعترض إنتاج السلع قيود. مثال : قيد رأس المال وقيد العمل. إن عوامل الإنتاج غير متوفرة بكثرة. نفترض أن إنتاج وحدة من السلعة الأولى يتطلب ساعة عمل وإنتاج السلعة الثانية يتطلب ساعتين عمل. كما أن كمية العمل المحدودة بـــ 8000 ساعة. إنتاج وحدة من السلعة الأولى يتطلب 3 وحدات من عنصر رأس المال. أما بالنسبة للسلعة الثانية فإنه يتطلب وحدتين من رأس المال. أما كمية رأس المال فهي محددة بـــ 9000 وحدة. المطلوب تعظيم دالة الهدف تحت هذه القيود.

نفترض عدم سالبية المتغيرات. يكتب البرنامج على الشكل التالي :



دالة الهدف $P = 2{,}5x + 2y$

قيد العمل : $x + 2y \leq 8000$

قيد رأس المال : $3x + 2y \leq 9000$

عدم سالبية المتغيرات : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

يمكن حل المسألة بطريقتين :

الطريقة الأولى : الخطوط البيانية

نرسم المستقيم $x + 2y = 8000$

وكذلك المستقيم $3x + 2y = 9000$

ان المستقيمان يتقاطعان في النقطة I إحداثياتها : $(x = 500)$ و $(y = 3750)$.

نحصل على منطقة أو حيز الا مكان OAIB. نرسم دالة الهدف $y = -\frac{5}{4}x$ التي تمر بنقطة الفواصل. هذا المستقيم يتحرك داخل المنطقة OAIB وكلما ابتعد عن نقطة الفواصل كلما زادت الأرباح حتى نصل إلى أبعد نقطة ممكنة داخل المنطقة. هذه النقطة هي إحداثيات تقاطع المستقيمين فهي إذن حل لجملة معادلتين لمجهولين.

$$\begin{cases} x + 2y = 8000 \\ 3x + 2y = 9000 \end{cases} \Rightarrow x = 500 \quad y = 3750$$

دالة الهدف $P = 2{,}5(500) + 2(3750)$

$$P = 8750$$

هذه القيمة تمثل أقصى ربح ممكن.

الطريقة الثانية : طريقة السمبلكس

نستخدم متغيرين مكملين وذلك لتحويل المتراجحات إلى معادلات. نكتب البرنامج على الشكل التالي :

$$P = 2{,}5x + 2y$$

$$x + 2y + S_K = 8000 \Rightarrow S_k = 8000 - x - 2y$$

$$3x + 2y + S_L = 9000 \Rightarrow S_L = 9000 - 3x - 2y$$

من الواضح أن الحل الأساسي هو :

$$x = 0 \quad y = 0 \quad \mathrm{P} = 0$$

يمكن وضع ذلك على شكل جدول 1:

		x	y
P	0	2,5	2
S_K	8000	-1	-2
S_L	9000	-*3	-2

تقتضي القاعدة اختيار عنصر الارتكاز. فيمثلنا هذا، العنصر هوَ العدد (3-)

هذا يعني أن تحل x محل S_L في كافة المعادلات.

فنحصل على : $S_L = 9000 - 3x - 2y \Rightarrow$

$$x = 3000 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}S_L$$

$$S_K = 8000 - (3000 - 2/3y - 1/3S_L) = 7500 + \frac{y}{6} - \frac{5}{6}S_L$$

وهكذا نحصل على الجدول 2

		S_L	y
P	7500	-5/6	-1/3
S_K	5000	1/3	-4/3
x	3000	-1/3	-2/3

نجد أن هناك حل أساسي.

$x = 3000 \quad S_L = y = 0 \quad P = 7500 \quad S_K = 5000$

هذا الحل ليس بالأفضل، يجب البحث عن حل أساسي آخر أفضل منه. عنصر الإرتكاز (4/3-)

نعوض S_K بـــ y فنحصل على المعادلات التالية :

$$y = \frac{3}{4}(5000) + \frac{1}{4}S_L - \frac{3}{4}S_K$$

$$P = 8750 - \frac{3}{4}S_L - \frac{1}{4}S_K$$

$$x = 500 - \frac{1}{2}S_L + \frac{1}{2}S_K$$

وهكذا نحصل على الجدول الأخير والذي يعطينا أفضل حل.

$$y = 3750 \qquad x = 500$$

$$P = 2,5(500) + 2(3750) = 8750$$

		S_L	S_K
P	8750	-3/4	-1/4
x	500	-1/2	1/2
y	3750	1/4	-3/4

ملاحظة هامة :

فيما يخص حساب نقطة الإرتكاز ننظر إلى دالة الهدف ونأخذ أكبر قيمة موجودة لدالة الهدف. ففي الجدول رقم 1 نجد أن نقطة الارتكاز موجودة في العمود الأول لأن 2 أقل من 2,5. علينا أن نختار ما بين القيمتين (-1) و(-3) لذلك نقسم $\left(\frac{8000}{-1}\right) = (-8000)$ ، $\left(\frac{9000}{-3}\right) = (-3000)$ ثم نأخذ أصغر قيمة مطلقة أي 3000 أصغر من 8000. إذن نقطة الارتكاز موجودة في تقاطع العمود ء والسطر 9000، أي العدد (-3). بعد معرفة نقطة الارتكاز

نجري التحويلات العادية وبنفس الطريقة نجد نقطة الارتكاز في الجدول رقم 2 وهي في العمود y لأن $\frac{1}{3}$ أكبر من $-\frac{5}{6}$.

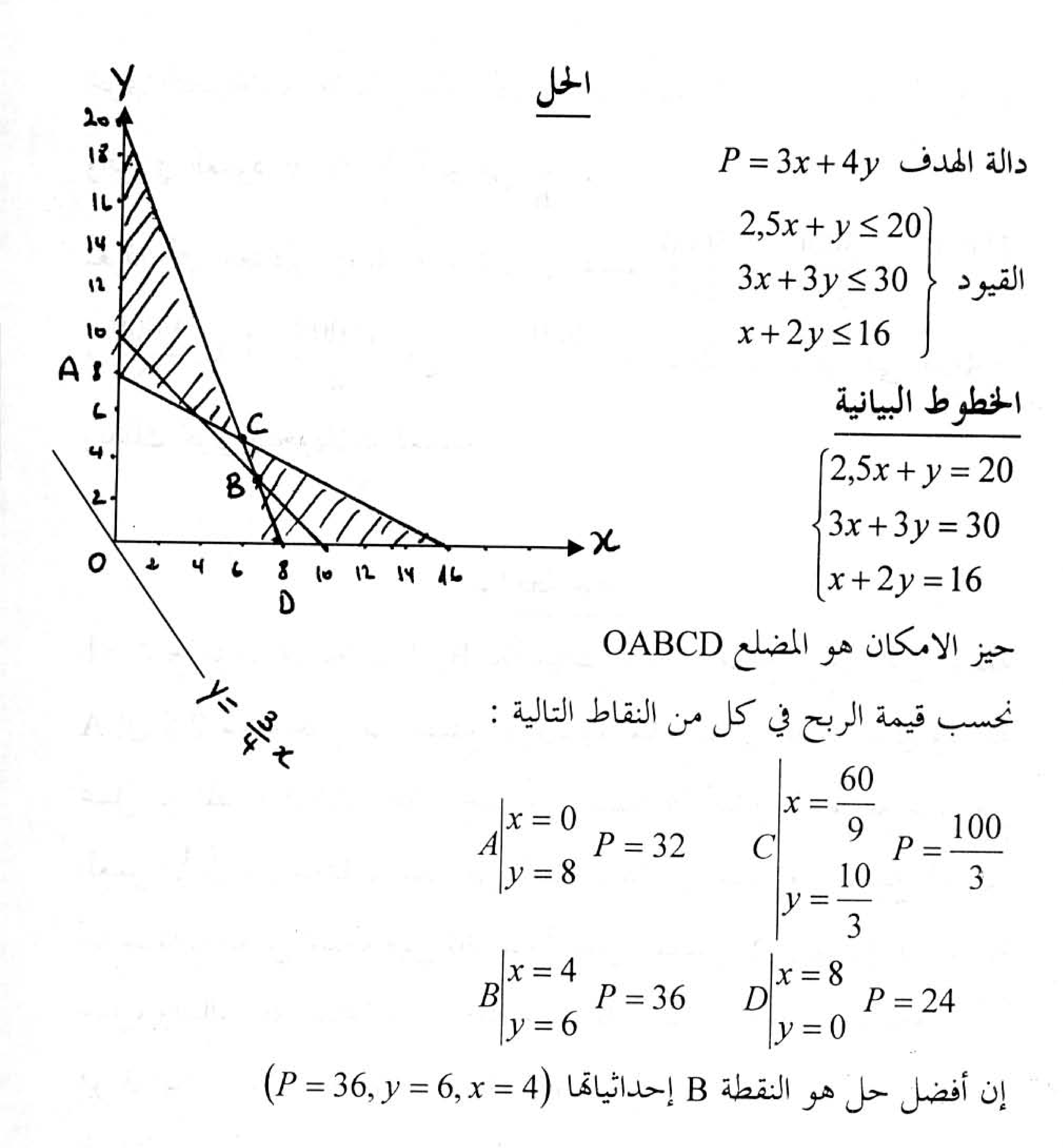
لمعرفة أي العددين (4/3−) و(2/3−) نقسم $\frac{5000}{4/3}$ و $\frac{3000}{2/3}$ أو $\frac{15000}{4}$ و$\frac{9000}{2}$ بما أن $\frac{15000}{4}$ أقل من $\frac{9000}{2}$ إذن نقطة الارتكاز هي (4/3−) وبذلك نجري التحويلات السابقة.

مراجعة عامة

1- تنتج مؤسسة سلعتين A وB بالكميات x و y تحتاج الوحدة من السلعة A إلى 2,5 ساعة عمل من المصنع الأول، و3 ساعات من المصنع الثاني وساعة عمل من المصنع الثالث. أما الوحدة من السلعة B تحتاج إلى ساعة عمل من المعمل الأول و3 ساعات عمل من المصنع وساعتين عمل من المصنع الثالث. أما ساعات العمل المتاحة فهي 20 ساعة عمل للمصنع الأول والثاني 30 ساعة عمل، وللثالث 16 ساعة عمل. فإذا علمنا بأن ربح الوحدة من السلعة الأولى هو 3 دينار ومن السلعة الثانية هو 4 دينار.

السؤال : أحسب إنتاج السلعتين الذي يحقق أقصى ربح ممكن ضمن ساعات العمل المحدودة ؟

الحل



دالة الهدف $P = 3x + 4y$

القيود
$$\left.\begin{array}{l} 2{,}5x + y \le 20 \\ 3x + 3y \le 30 \\ x + 2y \le 16 \end{array}\right\}$$

الخطوط البيانية

$$\begin{cases} 2{,}5x + y = 20 \\ 3x + 3y = 30 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$$

حيز الامكان هو المضلع OABCD

نحسب قيمة الربح في كل من النقاط التالية :

$$A\left|\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 8 \end{array}\right. \quad P = 32 \qquad C\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{60}{9} \\ y = \dfrac{10}{3} \end{array}\right. \quad P = \frac{100}{3}$$

$$B\left|\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 6 \end{array}\right. \quad P = 36 \qquad D\left|\begin{array}{l} x = 8 \\ y = 0 \end{array}\right. \quad P = 24$$

إن أفضل حل هو النقطة B إحداثياتها $(P = 36, y = 6, x = 4)$

2- ينتج معمل نوعين من البنطلونات، رجالي ونسائي. ينتج المعمل أسبوعيا 6000 بنطلون رجالي سعر الواحد 35 دينار و3000 بنطلون نسائي سعر الواحد 55 دينار. يشغل المعمل 50 عاملا يعملون 10 ساعات يوميا مدة 5 أيام في الأسبوع، إن الوقت اللازم لإنتاج بنطلون نسائي هو ضعف الوقت اللازم لإنتاج بنطلون رجالي.

الحد الأقصى لإنتاج المعمل اليومي هو 1600 بنطلون رجالي.

كلفة صنع البنطلون النسائي هو 40 دينار والبنطلون الرجالي هو 25 دينار.

السؤال الأول : ما هو برنامج الإنتاج الأسبوعي الذ ي يسمح بتحقيق أقصى ربح ممكن ؟

السؤال الثاني : نفترض أن البنطلون النسائي يباع بـــ 60 دينار بدلا من 55 دينار. أما الكمية المطلوبة فتنخفض من 3000 بنطلون إلى 2000. نفترض أن عناصر المسألة الباقية لا تتغير. ما هو البرنامج المفضل في هذه الحالة ؟

الحل

نفترض x_1 عدد البنطلونات الرجالية و x_2 عدد البنطلونات النسائية.

دالة الهدف $P = 10x_1 + 15x_2$

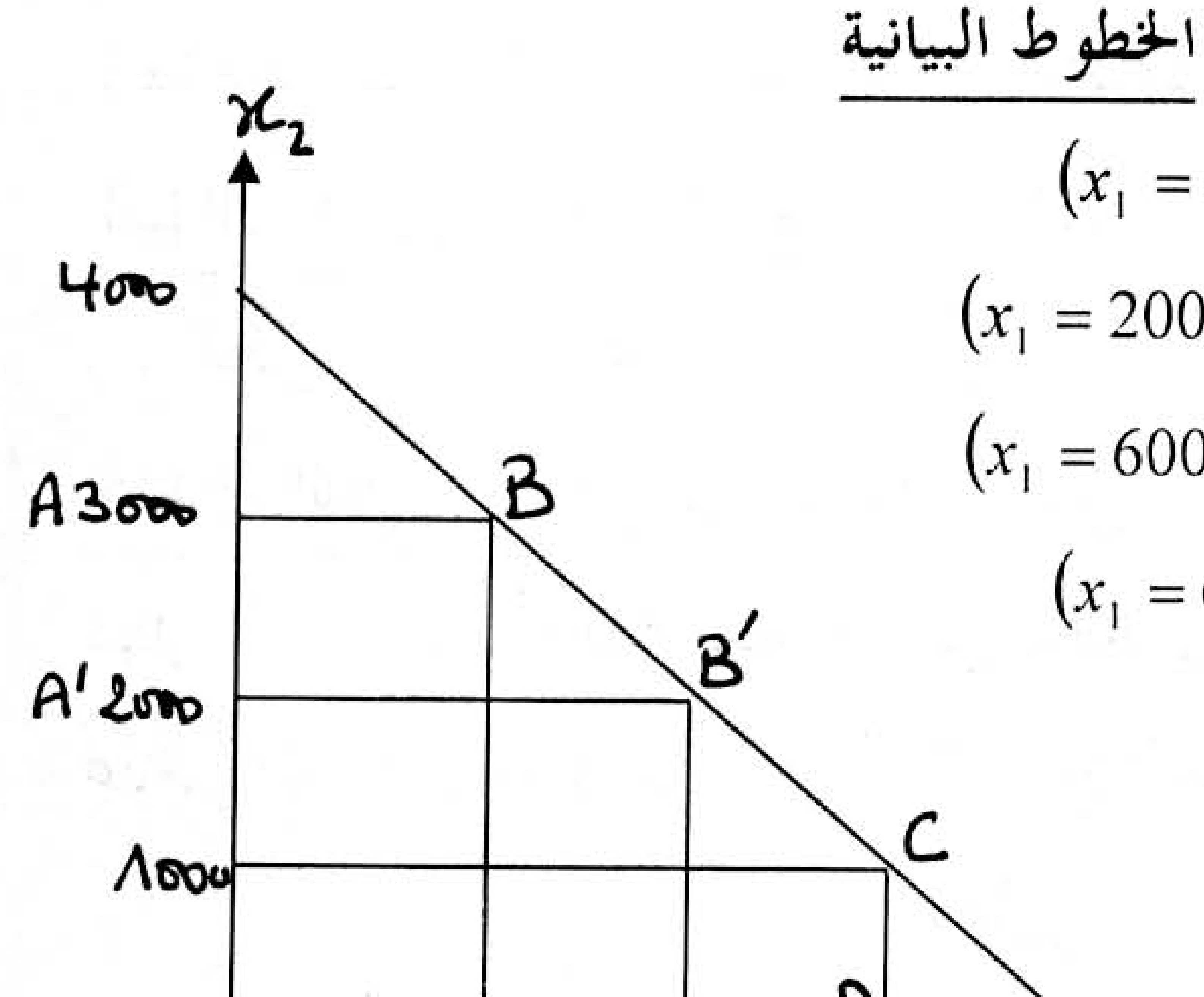
قيود الوقت $x_1 + 2x_2 \leq 8000$

قيود الطلب $x_2 \leq 3000 \quad x_1 \leq 6000$

المتغيرات المكملة

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 6000 \\ x_2 + x_4 = 3000 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8000 \\ P = 10x_1 + 15x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 6000 \\ x_2 = 1000 \\ P = 75000 \\ x_3 = x_4 = x_5 = 0 \end{array}$$

<u>الخطوط البيانية</u>



في النقطة A $(x_1 = 0 \ , \ x_2 = 3000)$

في النقطة B $(x_1 = 2000 \ , \ x_2 = 3000)$

في النقطة C $(x_1 = 6000 \ , \ x_2 = 1000)$

في النقطة D $(x_1 = 6000 \ , \ x_2 = 0)$

إن أفضل نقطة هي النقطة C

دالة الهدف $P = 75000$

$P = 10(6000) + 15(1000)$

السؤال الثاني :

عندما يرتفع سعر البنطلون النسائي من 55 إلى 60 دينار يصبح البرنامج كالتالي : $x_1 + 2x_2 \leq 8000$

$x_1 \leq 6000 \quad x_2 \leq 2000$

دالة الهدف $P = 10x_1 + 20x_2$

منطقة حيز الوجود تصبح كالتالي : $OA'B'CD$

القيود هي كالتالي : $x_1 + 2x_2 = 8000$

$4000 \leq x_1 \leq 6000$

$1000 \leq x_2 \leq 2000$

النقطة المطلوبة هي B' $\quad B' \begin{vmatrix} x_1 = 4000 \\ x_2 = 2000 \end{vmatrix}$

إحداثياتها هي : $P = 80000DA$

في هذه الحالة نلاحظ أن الربح الإجمالي ارتفع من 75000 إلى 80000دج.

القسم الثاني

اتخاذ القرارات الاقتصادية

مقدمة :

تعد عملية اتخاذ القرارات الاقتصادية جوهر وقلب وظيفة الإدارة. إن القرار يتعلق بالمستقبل الغير يقين. وعملية اتخاذ القرار عبارة عن اختيار أحد البدائل الذي يعتبر أ حسب بديل من وجهة نظر متخذ القرار. هذه العملية تشمل العناصر التالية :

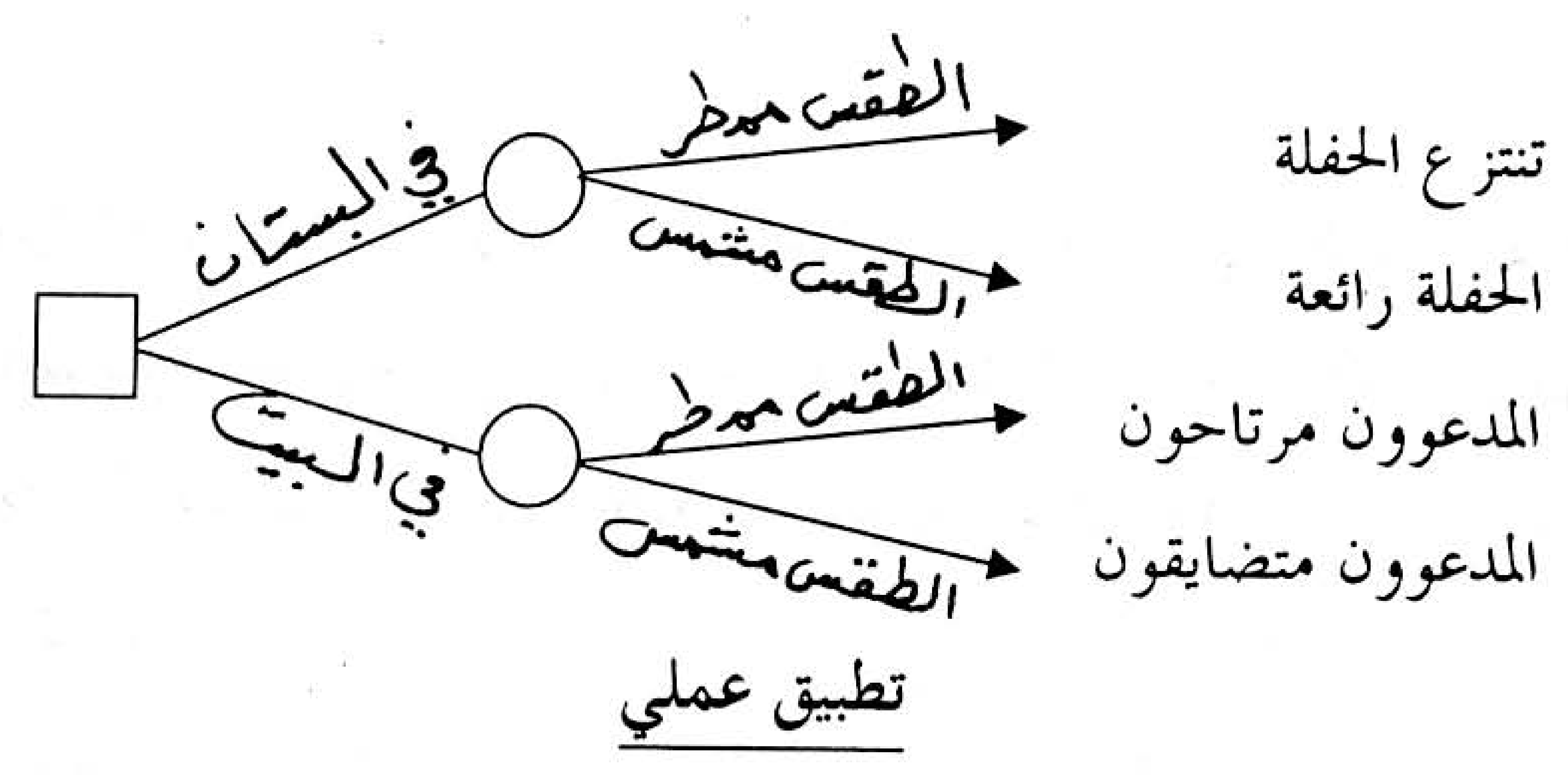
- وجود عدة بدائل والتي من بينها تتم عملية الاختيار
- وجود مجموعة من النتائج المتوقعة من استخدام كل بديل
- درجة عدم التأكد أي احتمال كل نتيجة
- اختيار البديل الذي يعطي أكبر ربح ممكن.

يمكن تمثيل العناصر المختلفة لعملية اختيار القرارات على شكل مخطط يسمى شجرة القرارات. فإذا كان هناك قرار إقتصادي يتقبل عدة نتائج وكانت كل نتيجة تعطي ربحا قدره $A_3 A_2 A_1$ واحتمال كل ربح $P_3 P_2 P_1$ فالأمل الرياضي $E = P_1 A_1 + P_2 A_2 + P_3 A_3$.

مثال :

يريد شخص أن يقيم حفلة في داره الصغير بمناسبة عيد ميلاده أو في بستانه الفسيح لكنه يخشى المطر، عليه أن يختار أن يقيم الحفلة إما في الدار أو في البستان، فإذا كان الطقس جميلا في الخارج فسوف يتضايق المدعوون لو عمل الحفلة بداره الصغيرة. أما إذا عمل الحفلة في البستان فالمشكل هو المطر ويتبلل

المدعوون وتنتزع الحفلة، فإذا كان الطقس ممطرا فمن الأفضل في البيت، يمكن تلخيص ذلك بشجرة القرارات :



تطبيق عملي

يتعجب على مدير إحدى الشركات البترولية أن يقرر فيما إذا كان يجب الاستمرار أو التوقف عن الحفر لأحد آبار البترول فإذا قرر المدير الاستمرار في الحفر وظهر في نهاية الأمر وجود بترول فسوف يحقق ربحا للشركة. وإذا قرر الاستمرار في الحفر و لم يكن هناك بترول فسوف يحمل ذلك الشركة خسارة. وإذا قرر التوقف عن الحفر وكان فعلا لا يوجد بترول فسوف يؤدي ذلك إلى ربح الشركة نتيجة لتوظيف أموالها المقررة للحفر في أوجه أخرى للإستثمار. وإذا قرر التوقف عن الحفر وكان فعلا يوجد بترول فسوف يؤدي ذلك إلى خسارة أو ربح ضائع. هذا المثال يعتبر لعبة ما بين المدير وخصمه الطبيعة، إن كلا من اللاعبين يملك تصرفين، بالنسبة لمدير الشركة يملك تصرفين، بالنسبة لمدير الشركة يملك الخيار ما بين الاستمرار أو التوقف عن الحفر أما بالنسبة للطبيعة فتملك خيارين : وجود أو عدم وجود بترول.

إن تصرف اللاعبين يولد أعباء وخسارة لكل لاعب، يمكن عرض ذلك في الجدول التالي :

	الطبيعة	
	يوجد بترول	لا يوجد بترول
مدير / الشركة	8M	-4,8M
	-3,2M	0,8
احتمال	40%	60%

السؤال : ما هو قرار المدير ؟

للإجابة يجب أن نحسب الأمل الرياضي في الحالتين : الاستمرار أو التوقف عن الحفر فنحصل على النتيجة E_1 و E_2.

من الأفضل الاستمرار بالحفر لأن الربح المتوقع :

$$E_1 = 8(40\%) - 4{,}8(60\%) = 0{,}32$$
$$E_2 = -3{,}2(40\%) + 0{,}8(60\%) = -0{,}8$$
$$0{,}32 \rangle -0{,}8$$

تطبيق :

يريد منظم أن يختار ما بين قرارين :

القرار الأول
- احتمال 50 % بأن يربح مليون دينار.
- احتمال 50 % بألا يربح شيئا.

القرار الثاني
- احتمال 60% بأن يربح مليونين دينار
- احتمال 30% بألا يربح شيئا
- احتمال 10% بأن يخسر 6 ملايين دينار.

السؤال: أي القرارين أفضل للمنظم؟

الحل

نحسب الأمل الرياضي لكل قرار فنحصل على:

$$E_1 = 1(0,5) + 0(0,5) = 0,5M$$

$$E_2 = 2(0,6) - 6(0,1) = 0,6M$$

النتيجة: نلاحظ أن القرار الثاني أفضل لأنه يعطي ربحا وسطيا أكبر.

0,6 أكبر من 0,5.

مراجعة عامة

1- مصنع لألعاب الأطفال يرغب في اختيار تصميم من بين 4 تصاميم. ثمن مبيع اللعبة هو 10 دنانير. أما تكاليف إنتاج كل تصميم فهي معطاة بالجدول التالي:

التصميم	النفقة الثابتة	النفقة المتغيرة
A	100.000	5دج
B	160.000	4 دج
C	300.000	3 دج
D	500.000	2 دج

أما الطلب على الألعاب فهو معطى بالجدول التالي:

الطلب	الكمية	الاحتمال
خفيف	50.000 وحدة	%20
متوسط	100.000 وحدة	%50
قوي	150.000 وحدة	%30

السؤال: أي التصاميم الأربعة أفضل؟

الحل

لاختيار أفضل التصاميم لا بد من حساب الربح المقابل لكل تصميم

الربح = الايراد الكلي – النفقة الكلية. نقيم جدولا نحسب فيه كافة العناصر آخذين بعين الاعتبار نوع الطلب والاحتمال المقابل لذلك وهكذا نحصل على الجدول التالي:

نوع الطلب	الكمية	الايراد الكلي	النفقة الكلية	الربح
خفيف	50.000	500.000	350.000	150.000
متوسط	100.000	1.000.000	600.000	400.000
قوي	150.000	1.500.000	850.000	650.000

إذا أخذنا بعين الاعتبار الاحتمالات نصل إلى النتائج التالية بالنسبة لكل تصميم ونحسب الأمل الرياضي:

$E(A) = 150.000(20\%) + 400.000(50\%) + 650.000(30\%) = 425.000$ د ج

$E(B) = 140.000(20\%) + 440.000(50\%) + 740.000(30\%) = 470.000$ د ج

$E(C) = 50.000(20\%) + 400.000(50\%) + 750.000(30\%) = 435.000$ د ج

$E(D) = -100.000(20\%) + 300.000(50\%) + 700.000(30\%) = 340.000$ د ج

بعد مقارنة الأرباح للتصاميم الأربعة نلاحظ أن أفضل تصميم يجب اختياره هو التصميم B لأنه يعطي أكبر ربح ممكن. إذن على المشروع اختياره.

2- بائع جرائد يريد أن يعرف عدد الجرائد الواجب اقتناؤها كل أسبوع لتصريفها. فإذا علمنا بأن المجلة تكلف 2دينار وتباع بـــ 5دينار وتعطي لصاحبها ربحا قدره 3 دينار في حال بيعها أو خسارة 2دج في حالة عدم بيعها. لدينا الجدول التالي الخاص بالكميات المباعة مع احتمال مبيعها.

السؤال: ما هي أفضل كمية يقتنيها البائع لتعظيم ربحه؟

الحل

من الجدول التالي نستنتج بأن أفضل كمية يجب اقتناؤها هي الكمية 350 مجلة لأنها تعظم الربح ويساوي 525دج.

إذا رمزنا x الكمية الواجب اقتناؤها p احتمال بيعها وإذا كان الربح الافرادي = 3دج نجد أن $(1-p)$ يمثل احتمال عدم بيع الكمية x. بما أن قيمة الخسارة لكل مجلة=2دج إذن الخسارة الإجمالية هي $2(1-p)x$. والربح الإجمالي يمثل $3px$. إذن نقارن الكميتين فنحصل على:

$$3px = 2(1-p)x \Rightarrow 3px = 2x - 2px$$

$$5px = 2x \Rightarrow p = 2/5 = 40\%$$

هذا الاحتمال يقابل الكمية 350 أما الربح الإجمالي المقابل لهذه الكمية فيساوي: $525 = (105 \times 2) - (245 \times 3)$

الكمية	الاحتمال	الكمية المباعة	الكمية الغير مباعة	الربح التجمعي
50	100%	50	0	دج150-3 x50
100	99%	99 (180)	1 (20)	295=2x1-3x99
200	90%	81	19	205=2x19-3x81
		45 (225)	55 (75)	25=2x55-3x45 525
300	75%	20	30	0=2x30-3x20 525
350	40%	25	75	
400	25%	5	45	75-=2x75-3x25 450
500	10%	10	90	150-=2x90-3x10 300
600	2%	2	98	-190=98x2-3x2 110=190-300
700	1%	1	99	-85=2x99-3x1

3- بائع حليب يريد أن يعرف ما هي أفضل كمية يشتريها لتعظيم ربحه. هذه الكمية تتراوح ما بين 25 و28 علبة يوميا. ثمن مبيع العلبة 18دج. ثمن الكلفة

13دج. العلبة لا تخزن حتى اليوم الثاني. لاحظ البائع خلال 200 يوما أنه يبيع الكميات التالية حسب الجدول.

السؤال: ما هي أفضل كمية يجب أن يقتنيها لتعظيم ربحه الوسطي؟

الحل

لمعرفة أفضل كمية يجب اقتناؤها يوميا، نقوم بملء الجدول التالي:

عدد الأيام	الكمية	الاحتمال
20 يوما	25 علبة	%10
60 يوما	26 علبة	%30
100 يوما	27 علبة	%50
20 يوما	28 علبة	%10

الطلب / العرض	25	26	27	28	الربح الوسطي
25	125	125	125	125	125
26	112	130	130	130	128,2
27	99	117	135	135	126
28	86	104	122	144	144,8

النتيجة: نلاحظ أن أفضل كمية يجب اقتناؤها هي 26 علبة حليب، لأن الربح الوسطي الذي يقابلها يساوي 128,2دج ويمثل أعظم ربح ممكن.

4- بائع مظلات يريد أن يتمون. يربح 50دينار على كل مظلة تباع ويخسر 50دينار على كل مظلة لا تباع. أما الكميات المطلوبة فهي 400 مظلة إذا

كان الطقس صحوا وألف مظلة إذا كان الطقس غائما. هناك احتمال 40% لتصريف كمية 400 مظلة و60% لبيع كمية ألف مظلة.

السؤال الأول: أية استراتيجية يجب أن يختار؟

السؤال الثاني: نفترض أن الاحتمالات تغيرت وأصبحت 60% بالنسبة لـــ 400 مظلة و40% بالنسبة لألف مظلة، أية استراتيجية يجب أن يختار؟

السؤال الثالث: ما هو معدل الاحتمال x حتى تتعادل الاستراتيجيتان؟

الحل

لدينا الجدول التالي:

الطلب / المخزون	D_1=400	D_2=1000
S_1=400	400x50= 20000دج	(400x50)= 20000دج
S_2=1000	(600x50)-(400x50)= -10000دج	(1000x50)= 50000دج

الحالة الأولى: الاحتمالات هي 40% بالنسبة لـــ 400 مظلة و60% بالنسبة لـــ 1000مظلة، نحسب الأمل الرياضي في كلتا الحالتين ونجد

$$E_1 = 20000(40\%) + 20000(60\%) = 20000 \text{ دج}$$

$$E_2 = -10000(40\%) + 50000(60\%) = 26000 \text{ دج}$$

النتيجة: من الأفضل اختيار الاستراتيجية الثانية أي تموين 1000 مظلة لأن الربح الوسطي أكبر.

الحالة الثانية: عندما تصبح الاحتمالات 40% بالنسبة لألف مظلة 60% بالنسبة لـــ 400 مظلة نحسب الأمل الرياضي في كلتا الحالتين فنحصل على:

$$E_1 = 20000(60\%) + 20000(40\%) = 20000$$ دج
$$E_2 = -10000(60\%) + 50000(40\%) = 14000$$ دج

النتيجة: من الأفضل اختيار الاستراتيجية الأولى لأن الربح الوسطي أكبر في هذه الحالة

الحالة الثالثة: نفترض الاحتمال $x\%$ في الحالة الأولى و $(1-x)\%$ في الحالة الثانية، نجد:

$$E_1 = 20000(x\%) + 20000(1-x)\% = 20000$$ دج
$$E_2 = -10000(x\%) + 50000(1-x)\% = y$$

نفترض $E_1=E_2$ نجد بأن:

$$-10000x - 50000x + 50000 = 20000$$
$$600000x = 30000 \Rightarrow x = 50\%$$

5- يمتلك مشروع آلتين لتعبئة المنتجات. أحدهما قديمة والثانية جديدة، وعليه أن يختار ما بينهما ليستثمر أمواله. لدينا العناصر التالية:

بالنسبة للآلة الجديدة: تعتبر أكثر كفاءة من الآلة القديمة إذا كانت مواد التعبئة من النوع الجيد، أما إذا كانت من النوع الرديء فالآلة القديمة أفضل وعلى المشروع أن يقرر من بين هاتين الآلتين مستعينا بالمعلومات التالية:

- 80% من المواد هي من النوع الجيد و20% من المواد من النوع الرديء
- الآلة القديمة تحقق أرباحا قدرها 200دج إذا كانت المواد من النوع الجيد، و160دج إذا كانت من النوع الرديء

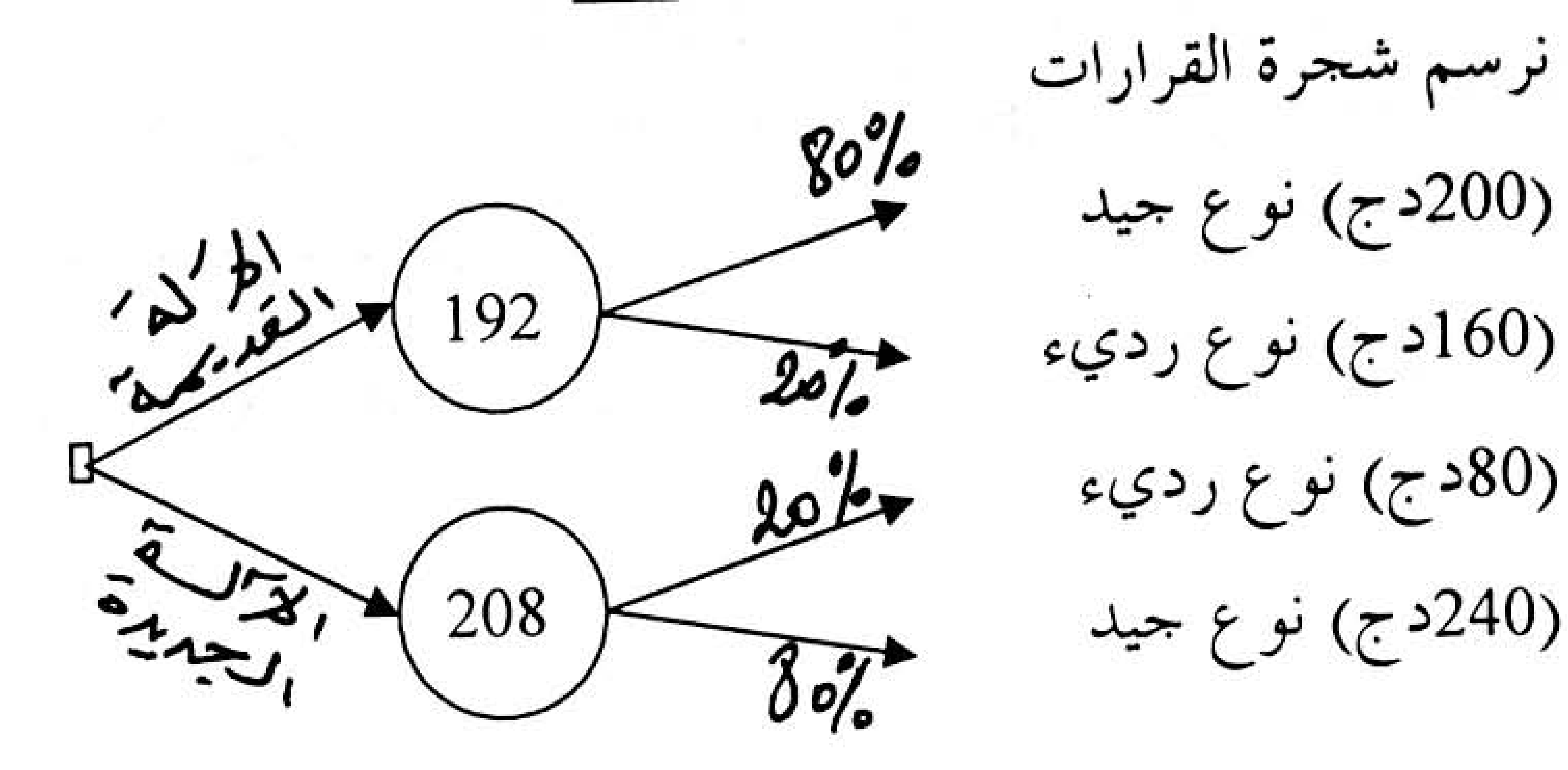
- الآلة الجديدة تحقق أرباحا قدرها 200دج إذا كانت المواد من النوع الجيد و80دج إذا كانت المواد من النوع الرديء.

السؤال: أي الآلتين أفضل عند استعمالها في الحالات التالية:

- إذا كانت الاحتمالات 80% من النوع الجيد، و20% من النوع الرديء.
- إذا كانت الاحتمالات 20% من النوع الجيد، و80% من النوع الرديء.
- ما هو الاحتمال x حتى تتساوى الآلتان في الربح؟

الحل

نرسم شجرة القرارات



الحالة الأولى: نحسب الأمل الرياضي لكل آلة.

بالنسبة للآلة القديمة: $E_1 = 200(80\%) + 160(20\%) = 192$ دج

بالنسبة للآلة الجديدة: $E_2 = 240(80\%) + 80(20\%) = 208$ دج

النتيجة: من الأفضل استخدام الآلة الجديدة بدلا من القديمة لأن الربح الوسطي أكبر.

الحالة الثانية: نحسب الأمل الرياضي للآلة القديمة:

$E_1 = 200(20\%) + 160(80\%) =$ 168 د ج

نحسب الأمل الرياضي للآلة الجديدة:

$E_2 = 240(20\%) + 80(80\%) =$ 112 د ج

النتيجة: في هذه الحالة من الأفضل استخدام الآلة القديمة.

الحالة الثالثة: نفترض x معدل احتمال استخدام المواد من النوع الجيد و $(1-x)$ معدل احتمال استخدام المواد من النوع الرديء.

بالنسبة للآلة الجديدة: $E_1 = 240x + 80(1-x)$

بالنسبة للآلة القديمة: $E_2 = 200x + 160(1-x)$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow 200x + 160 - 160x = 240x + 80 - 80x$$

$$40x + 160 = 160x + 80 \Rightarrow x = 2/3$$

لو عوضنا x بقيمتها لحصلنا على:

$$E_1 = 200(2/3) + 60(1/3) = \frac{560}{3}$$

$$E_2 = 240(2/3) + 80(1/3) = \frac{560}{3}$$

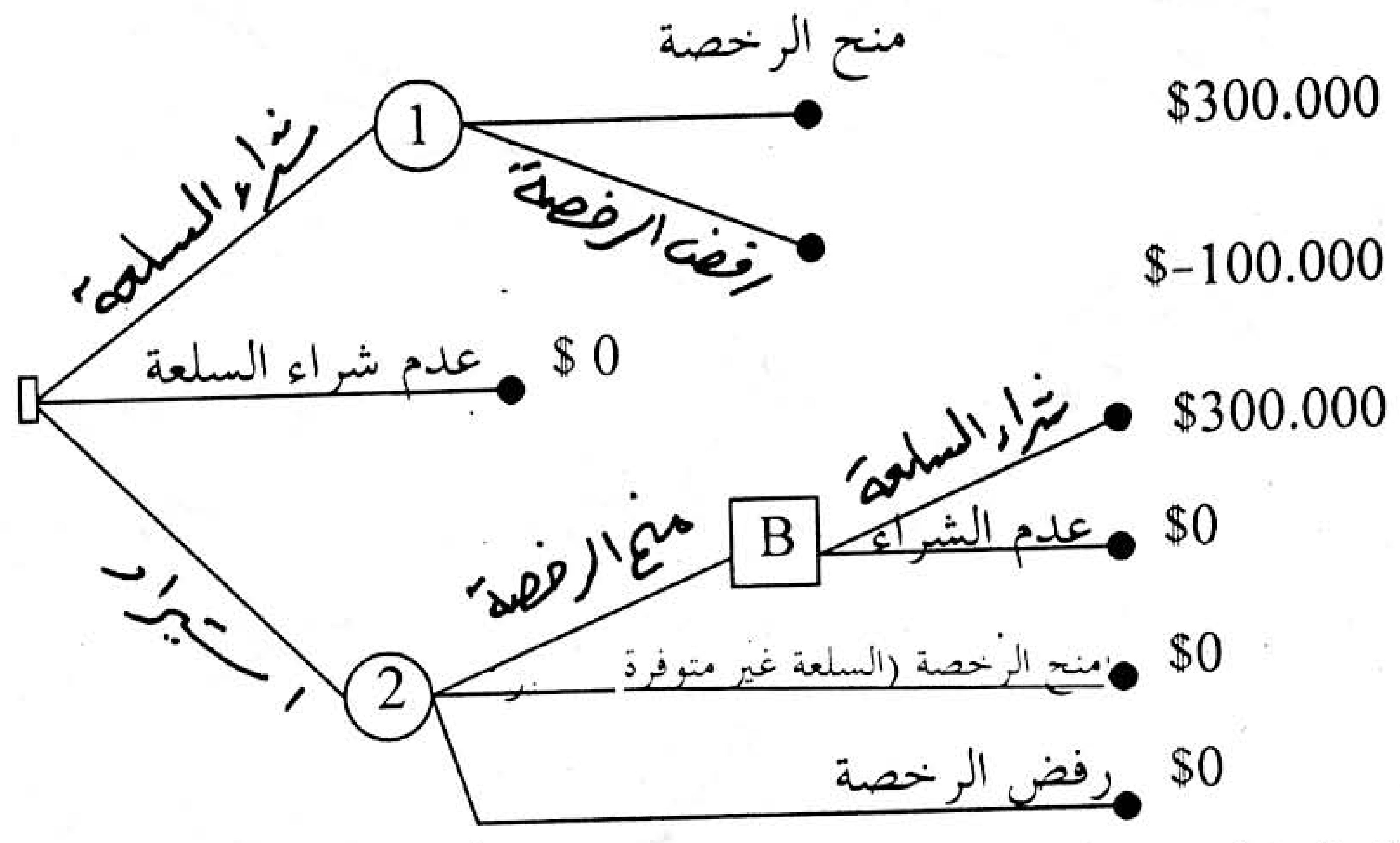
6- تاجر يمكنه أن يشتري 100.000 طن من سلعة من الخارج بسعر 5$ للطن وبيعها بسعر 8$ للطن فورا. يعتقد التاجر بأن الحكومة يمكن أن ترفض منحه رخصة استيراد البضاعة من الخارج. في هذه الحالة يتحمل التاجر خسارة قدرها 1$ للطن. كما أنه بإمكانه الانتظار للحصول على رخصة استيراد قبل البدء بعملية الشراء. لكن نظرا لمرور الوقت قبل استلام رد

الحكومة يمكن للبائع أن يبيع البضاعة لتاجر آخر. عندئذ لن تتوفر البضاعة لديه فيما بعد. لدينا الاحتمالات التالية: هناك احتمال 50% للحصول على رخصة الاستيراد وهناك احتمال 70% بعدم توفر البضاعة عند حصوله على رخصة الاستيراد.

السؤال: أيهما أفضل؟ شراء البضاعة فورا أم انتظار رخصة الاستيراد؟

الحل

نرسم شجرة القرارات



في العقدة B نحسب الربح المرتقب في النقطة (1) وفي النقطة (2).

في النقطة (1) الربح المرتقب $E_1 = -\frac{1}{2} \times 100.000 + \frac{1}{2} \times 300.000$

$E_1 = 100.000\,\$$

في النقطة (2) الربح المرتقب $E_2 = 50\%(0) + 35\%(0) + 300.000(15\%)$

$E_2 = 45.000\,\$$

في العقدة A لدينا الخيار ما بين: الشراء الفوري، الربح المرتقب=100.000$.

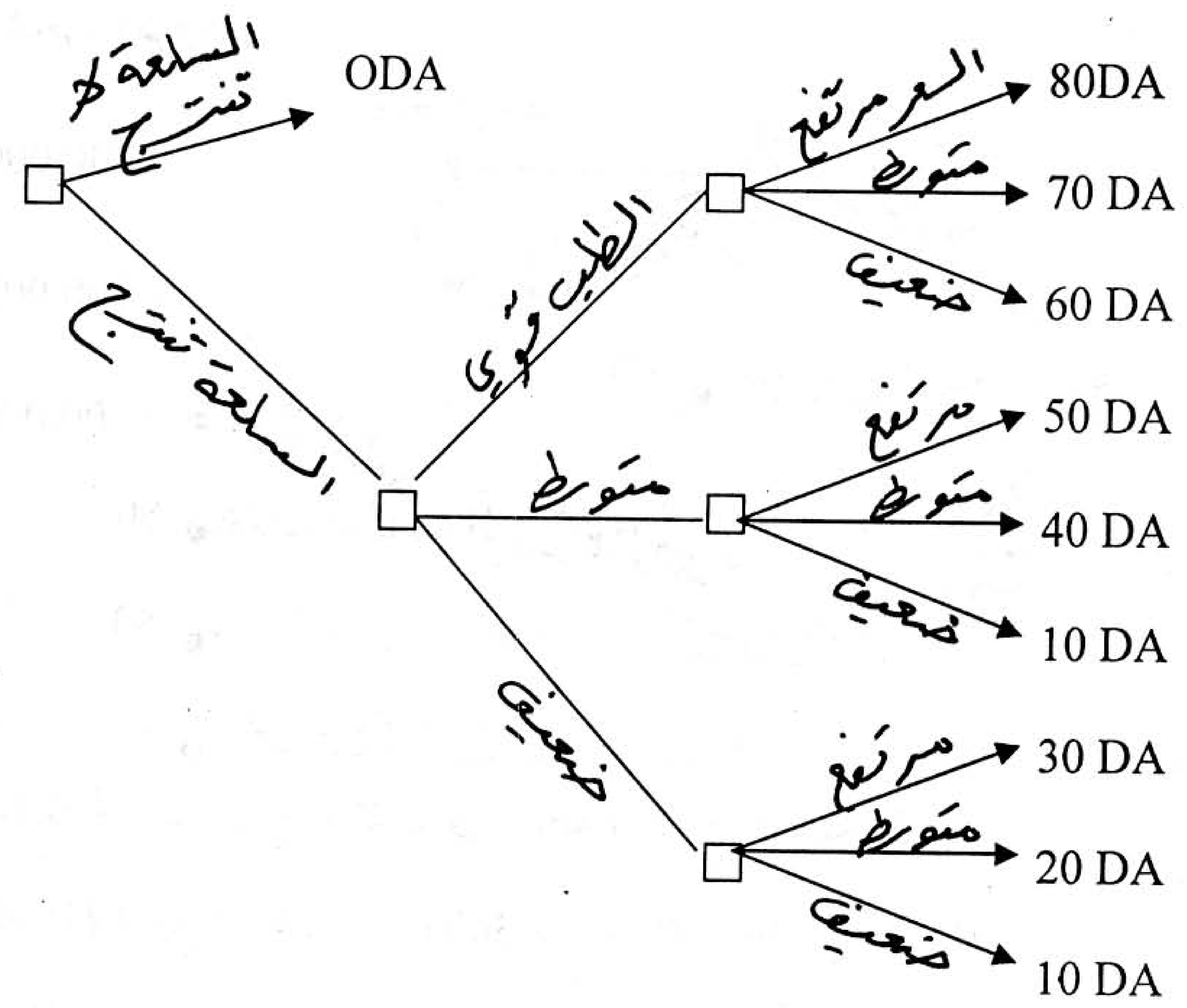
عدم الشراء، الربح المرتقب=0$.

طلب رخصة الاستيراد، الربح المرتقب = $45.000.

النتيجة: من الأفضل الشراء الفوري.

7- تود شركة انتاج سلعة جديدة محددة سعرا مرتفعا. لدينا شجرة القرارات التالية: السؤال: هل من مصلحة الشركة انتاج السلعة أم لا؟.

الحل



نحسب الأمل الرياضي في حال إنتاج السلعة و بيعها بسعر مرتفع فنحصل على:

55 دج = (%20) 30دج + (%50) 50دج+ (%30) 80دج = E

إذا لم تنتج السلعة فالسعر = 0

النتيجة : من الأفضل انتاج السلعة.

<u>تمرين رقم 1</u>: يشتري بائع خضرة كل يوم عدد من الصناديق بسعر 40دج للصندوق و يبيعه بـــ 80 دج، أما الصناديق التي لا تباع فتعتبر خسارة للبائع.

لقد لاحظ خلال 100 يوم أن الكمية المطلوبة معطاة بالجدول التالي :

الطلب	0صندوق	1صندوق	2صندوق	3صندوق	4صندوق	5صندوق	المجموع
عدد الأيام	10	10	20	40	15	5	عدد الأيام

المطلوب رسم جدول المدخلات المخرجات و الذي يمثل ربح التاجر علما بأن الكمية تتراوح ما بين 0 صندوق و 5 صناديق.

<u>الحل</u>

الطلب / المخزون	0	1	2	3	4	5	إحتمال	الربح
0	0	0	0	0	0	0	%10	0
1	-40	40	40	40	40	40	10%	32
2	-80	0	80	80	80	80	20%	56
3	-120	-40	40	120	120	120	40%	64
4	-160	-80	0	80	160	160	15%	40
5	-200	-120	-40	40	120	200	5%	4

من هذا الجدول نستخلص بأن أفضل كمية يجب تخزينها هي الكمية $Q = 3$ صندوق لأن الربح المقابل هو $\pi = 64$.

<u>تمرين رقم 2</u>: يشتري مطعم نوع من الكعك، ثمن الكعكة 10دج وتباع 15دج معا لا تباع يعاود ويسترد 8دج، مبيعات المطعم تتراوح ما بين 30 و36 دزينة، الجدول التالي يعطينا نسبة المبيعات.

المبيعات	30	31	32	33	34	35	36
الإحتمال	%1	%9	%16	%25	%30	%11	%8

السؤال: تحديد أفضل كمية من الكعك يجب أن يتمون به لتعظيم ربحه

الحل

نلاحظ أن المطعم يحقق ربحا قدره 60=12(10-15)دج على كل دزينة مباعة وخسارة قدرها 24-=12(8-10)- دج على كل دزينة لا تباع نقوم بوضع الجدول التالي. حسب هذا الجدول أن أفضل كمية يتمون بها المطعم هي 34 دزينة و مقدار الربح 1966 دج.

الطلب / التموين	30	31	32	33	34	35	36
30	1800	1776	1752	1728	1704	1680	1656
31	1800	1860	1836	1812	1788	1764	1740
32	1800	1860	1920	1846	1872	1840	1824
33	1800	1860	1920	1980	1956	1932	1908
34	1800	1860	1920	1980	2040	2016	1992
35	1800	1860	1920	1980	2040	2100	2076
36	1800	1860	1920	1980	2040	2100	2160
الربح	1800	1859	1910	1949	1966	1958	1947

القسم الثالث: نظرية المباراة

مقدمة :

تعتبر نظرية المباراة من فروع الرياضيات الحديثة نسبيا. لقد بدأت في بداية هذا القرن مع العالم الفرنسي بوربل و الذي يعتبر أول من بحث في هذا الموضوع، ثم تطورت النظرية مع العالمين فون نيومان ومورجر شتاين عندما نشرا كتابهما الشهير "نظرية الألعاب واقتصاد الرفاهة" والذي احتوى على تطبيقات مهمة لنظرية المبارزة في موضوع الإقتصاد. لقد أصبحت فائدة هذه النظرية ملموسة بفضل تقدم البرمجة الخطية واستعمال الحاسبات الإلكترونية. إن لعب الورق والشطرنج وغيرهما من المباراة بين شخصين تمثل مجالات لتطبيق نظرية المباراة. كما أن الحالات التنافسية في ميدان السياسة والإقتصاد وإدارة الأعمال والمعارك الحربية تدخل ضمن المجالات التطبيقية المهمة لنظرية المباراة.

عندما تتخذ إدارة المشروع قرار معينا مثلا: تخفيض السعر فإنها تأخذ بعين الإعتبار رد الفعل الذي يمكن أن يحدثه هذا القرار على أطراف أخرى تنافسها في هذا المجال : سوق القلة، إن كل طرف يحاول أن يتخذ قرارا يؤدي إلى تعظيم الحد الأدنى لربحه أو إقلال الحد الأقصى لخسارته. أن عملية اتخاذ القرار في هذه الحالة ما هي إلا مباراة بين أطراف معينة، لكل منهم هدف بتأثر بقرارات الآخرين إن نظرية المباراة تزودنا بحلول لمثل هذه القضايا والهدف في نهاية الأمر ما هو إلا معرفة الطرق التي تؤدي إلى الوضع الأمثل.

مفاهيم أساسية

في نظرية المباراة، هناك بعض المفاهيم: مثلا عدد الأشخاص المشتركين في المباراة –طبيعة العائد لكل اختبار- عدد الاختبارات الممكنة لكل شخص.

- **عدد أطراف المباراة:** المباراة التي تحتوي على شخصين هي التي نالت الحظ الأكبر من اهتمام علماء هذه المادة. هذا النوع من المباراة يطلق عليه اسم مباراة ثنائية.
- **العائد:** تصنف المباراة إلى نوعين بالنسبة للنتيجة النهائية أ ي المحصلة للمباراة. في النوع الأول، يكون المجموع الجبري لعوائد المباراة صفرا، أي ذات محصلة صفرية. هذا يعني أن العائد الموجب لأحد الطرفين يقابله عائد سالب للطرف الآخر. أي أن ما يكسبه الطرف الأول يخسره الطرف الثاني والعكس بالعكس. أما النوع الثاني من المباراة فلا يكون فيه المجموع الجبري لعوائد المباراة صفرا، أي ذات محصلة غير صفرية. ففي الحقيقة المباراة الثنائية ذات المحصلة الصفرية هي التي نالت حظا أكبر من اهتمام علماء نظرية المباراة.
- **الاستراتيجية:** استراتيجية لاعب معين في نظرية المباراة هي خطة توضح سلوك هذا اللاعب مقابل كل سلوك محتمل من لاعب آخر. لذلك فإن الاستراتيجية هي خطة كاملة لأداء المباراة. تصنف المباراة حسب عدد الاستراتيجيات المتاحة لكل لاعب.
- **مصفوفة العائد:** يفترض في نظرية المباراة أنه يمكن ترتيب الاستراتيجيات المتاحة وأنه يمكن التعبير عن العوائد المقابلة لكل استراتيجية بوحدات ذات

معنى. ففي المباراة الثنائية ترتب العوائد على شكل مصفوفة يطلق عليها مصفوفة العائد أو مصفوفة المباراة. تمثل صفوف هذه المصفوفة استراتيجيات أحد اللاعبين (اللاعب الأول) وتمثل الأعمدة، استراتيجيات اللاعب الآخر (اللاعب الثاني) وتكون عناصر المصفوفة هي العوائد. فالعنصر الذي يقع في الصف i والعمود j والذي نرمز له بالرمز x_{ij} هو العائد عندما يستخدم اللاعب الأول الاستراتيجية i أما اللاعب الثاني فيستخدم الاستراتيجية j وإذا كان المقدار x_{ij} أكبر من الصفر فإن اللاعب الأول يربح واللاعب الثاني يخسر.

- **النقاط السرجية:** إن أحسن اختيار لكل من اللاعبين هو ذلك الاختيار الذي يؤدي إلى أقل خسارة ممكنة مهما كانت اختيارات اللاعب الأول. يطلق عادة على احسن اختيار متاح بالاستراتيجية المثلى.

نفترض مباراة ثنائية ذات محصلة صفرية وذات استراتيجيات متعددة والتي تكون مصفوفة العائد معطاة بجدول ما. نأخذ أصغر عنصر في كل صف ونرمز له بالرمز r_i كذلك نأخذ أعظم عنصر في كل عمود ونرمز له بالرمز s_i إذن:

$$r_i = Min(r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, \ldots, r_{in})$$
$$s_i = Max(s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, \ldots, s_{in})$$

إن أحسن اختيار للاعب الأول هو أعظم الأعداد $r_1 r_2 r_3$ والذي يطلق عليه اسم أعظم الحدود الدنيا وبالمثل يكون أحسن اختيار للاعب الثاني هو اصغر الأعداد $s_1 s_2 s_3$ والذي يطلق عليه اسم اصغر الحدود العظمى. فإذا كان هناك عنصر في مصفوفة العائد هو أعظم الحدود الصغرى للصفوف. وبنفس الوقت أصغر الحدود العظمى للأعمدة يطلق على ذلك العنصر نقطة سرجية، إن

الاستراتيجيتين المثليتين للاعبين تتمثلان في الصف والعمود الذين تكون نقطة تقاطعهما هي نقطة سرجية. وقيمة هذه النقطة تمثل قيمة المباراة. إن النقطة السرجية تمثل بالنسبة للاعب الأول أقصى توقعاته بالنسبة لنفسه وأسوأ توقعاته بالنسبة لخصمه. وهكذا نكون قد توصلنا عن طريق نقطة السرج إلى حل المباراة.

مثال: لدينا المصفوفة التالية والتي تمثل عائد المباراة الثنائية ذات المحصلة الصفرية ما بين لاعبين I وII. نحسب الحدود العظمى لأعمدة المصفوفة والحدود الصغرى للصفوف، من هذا المثال نجد أن قيمة أعظم الحدود الصغرى = قيمة اصغر الحدود العظمى، لذلك يوجد نقطة السرج. وتكون قيمة المباراة = الواحد أي أن اللاعب I يكسب واحد واللاعب II يخسر واحد.

	اللاعب الثاني				Min	Maximin
اللاعب الأول	4	4	1	1	1	
	-4	0	-1	-4	-4	
	-5	1	1	-5	-5	↓
	4	4	1	1* ↘	1	
Max	4	4	1	1	سرج	نقطة
Minimax				→	→	1

تطبيق عملي: لدينا مصفوفة العائد التالية والتي تعطينا ما يدفعه اللاعب الثاني للأول أو العكس.

الحل

	اللاعب الثاني				Min	Minimax
اللاعب الأول	3	0	-1	1/2	-1	
	0	2	1	1/3	0	
	2	4	3	1 *	1	1
	3	4	3	1	نقطة السرج	

Maximin

بوجه عام يختار اللاعب الأول عندما يكون أمام استراتيجيات متعددة. الإستراتيجية التي تمنحه أقل ربح ممكن أما اللاعب الثاني فإنه ينظر إلى الأمور من وجهة نظر مختلفة. يمكن التعبير عن ذلك رياضيا بقولنا أن استراتيجية اللاعب الأول و يسمى بلاعب التعظيم أي تعظيم تدنية وأن استراتيجية اللاعب الثاني و يسمى لاعب التصغير أي تدنية تعظيم فإذا كانت قيمة تعظيم تدنية = تدنية تعظيم = 1 عندئذ نقول بأن المباراة هي ذات سرج و يسمى العائد الذي يتحدد بمقدار ما يدفعه اللاعب الثاني للأول بقيمة المباراة = 1.

ملاحظة: عندما تسيطر استراتيجية على أخرى بامكاننا شطب الإستراتيجية المسيطرة و بذلك نختصر المصفوفة في مثلنا هذا بالنسبة للاعب الأول.

نلاحظ أن الإستراتيجية الثانية مسيطرة من قبل الثالثة. و بذلك يمكن شطب الإستراتيجية الثانية. أما بالنسبة للاعب الثاني فالإستراتيجية الثانية تسيطر على الثالثة وكذلك تسيطر الأولى على الرابعة وبذلك نخفض مرتبة المصفوفة الأصلية و تصبح في هذا المثال نجد بسهولة نقطة سرج (+1)، فهي أصغر

$$\begin{array}{c} \text{الثاني} \quad \text{Min} \\ Max3 \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 3 & 1^* \end{bmatrix}^{-1}_{1} \\ 3 \quad\quad 1 \end{array}$$

قيمة عددية موجودة في الصف الثاني

وبنفس الوقت هي أكبر قيمة عددية موجودة في العمود الثاني.

تمرين رقم 3 : شركتين تحتكران السوق A وB لدى كل واحدة استراتيجيتين في ميدان الأسعار: إما رفع الأسعار أو تخفيضها.

الجدول التالي يبين لنا ربح كل شركة حسب الإستراتيجية المتبعة.

		الشركة B	
		رفع الأسعار	خفض الأسعار
الشركة A	رفع الأسعار	$\pi_A = 250$ $\pi_B = 150$	$\pi_A = 120$ $\pi_B = x$
	خفض الأسعار	$\pi_A = 350$ $\pi_B = 40$	$\pi_A = 180$ $\pi_B = 90$

السؤال :

برهن على أن هناك استراتيجية مسيطرة بالنسبة للشركة A.

الحل

نقول أننا أمام استراتيجية مسيطرة للشركة A إذا كان مهما كان تصرف الشركة B فالشركة A تختار نفس الاستراتيجية.

1- إذا اختارت الشركة B استراتيجية الأسعار المرتفعة فالشركة A تعظم أرباحها باتباع سياسة تخفيض الأسعار (200 بدل350).

2- إذا اختارت الشركة B استراتيجية تخفيض الأسعار فالشركة A من مصلحتها أن تختار سياسة تخفيض الأسعار (120 بدل 180)، إذن مهما كانت استراتيجية الشركة B فيما يخص سياسة الأسعار فالشركة A من مصلحتها أن تطبق سياسة خفض الأسعار لذلك نسمي استراتيجية A بالاستراتيجية المسيطرة.

3- بالنسبة للشركة B : إذا اختارت الشركة سياسة تخفيض الأسعار فالشركة B تعظم أرباحها باتباع نفس السياسة (40 بدل 90) نقول عن استراتيجية B بأنها مسيطرة إذا كانت الشركة B لها نفس المصلحة إذا ما رفعت الشركة A أسعارها يكون الوضع كذلك إذا كانت قيمة $x \rangle 150$.

4- نقول أننا أمام توازن ناش Equilibre de NASH إذا أخذنا بعين الإعتبار الاستراتيجية المتبعة من إحدى الشركتين فالشركة الأخرى لا يمكن أن تزيد من أرباحها إذا غيرت وجهة نظرها. مهما كانت قيمة x فالشركة الأولى A تختار دائما تخفيض الأسعار، فإذا ما اختارت الشركة A هذه الاستراتيجية فمن مصلحة الشركة B أن تتصرف نفس الشيء وفي الأخير سوف تختار الشركتان استراتيجية تخفيض الأسعار وذلك لتحقيق أرباح هي ($\pi_B = 90$ و $\pi_A = 180$).

تمرين رقم 4 : تمرين بدون حل

لدينا شركتين A و B احتكاريتين لهما الاختيار في ميدان الأسعار إما برفعها أو تخفيضها، الجدول التالي يعطينا أرباح كل شركة حسب الاستراتيجية المتبعة :

		الشركة B	
		خفض الأسعار	رفع الأسعار
الشركة A	رفع الأسعار	$\pi_A = 40$ $\pi_B = 50$	$\pi_A = 80$ $\pi_B = 60$
	خفض الأسعار	$\pi_A = 60$ $\pi_B = 45$	$\pi_A = 120$ $\pi_B = 30$

السؤال : برهن بأن هذه المسألة تقودنا إلى توازن ناش NASH.

الاستراتيجية المركبة

في الحالات التي لا توجد فيها نقطة سرج، يلجأ اللاعبون إلى الاستراتيجيات المركبة للحصول على أكبر مكسب ممكن. يلعب اللاعب الأول كل صف من صفوفه جزءا معينا من الوقت كما يلعب اللاعب الثاني كل عمود من أعمدته جزءا معينا من الوقت. وعلى كل لاعب أن يحدد الوقت ليلعب كل صف أو عمود.

مثال : لدينا لاعبين ومصفوفة الدفع التالية

اللاعب الثاني

اللاعب الأول $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

معطاة بالجدول التالي. في هذا المثال نلاحظ بأنه لا يوجد نقطة سرج.

نفترض أن اللاعب الأول يقضي x وقت في لعب الصف الأول ويقضي $(1-x)$ وقت للعب الصف الثاني. أما اللاعب الثاني فيخصص y وقت للعب

العمود الأول و $(1-y)$ وقت للعب العمود الثاني. نحسب قيمة كل من x و y معتمدين على الجدول التالي :

يلعب اللاعب الأول x وقت السطر الأول $(1-x)$ وقت السطر الثاني	يكسب اللاعب الأول 5 نقاط x من الوقت	يكسب اللاعب الأول 1 نقطة x من الوقت
	يكسب اللاعب الأول 3 نقاط $(1-x)$ من الوقت	يكسب اللاعب الأول 4 نقاط $(1-x)$ من الوقت
المجموع	$5x+3(1-x)=$ $5x+3-3x=$ $2x+3$	$1x+4(1-x)=$ $1x+4-4x=$ $4-3x$

نحسب مكاسب اللاعب الأول بجعل المكاسب المتوقعة لهذا اللاعب عندما يلعب اللاعب الثاني العمود الأول = مكاسب اللاعب الأول عندما يلعب اللاعب الثاني العمود الثاني. نحصل على المعادلات التالية :

$$5x+3(1-x)=1x+4(1-x) \Rightarrow x=\frac{1}{5}=\%20 .$$

بنفس الطريقة نحصل على قيمة y من الجدول التالي :

يلعب اللاعب الثاني العمود الأول y من الوقت	يلعب العمود الثاني $(1-y)$ من الوقت	خسارة اللاعب الثاني المتوقعة
إذا لعب اللاعب الأول الصف الأول يخسر اللاعب الثاني 5 نقاط y من الوقت	يخسر اللاعب الثاني نقطة $(1-y)$ من الوقت	$5y+1(1-y)=$ $4y+1$
إذا لعب الأول الصف الثاني يخسر اللاعب الثاني 3 نقاط y من الوقت	يخسر اللاعب الثاني 4 نقاط $(1-y)$ من الوقت	$3y+4(1-y)=$ $4-y$

بوضع خسارة اللاعب الثاني المتوقعة عندما يلعب اللاعب الأول الصف الأول مساوية خسارة اللاعب الثاني المتوقعة عندما يعلب اللاعب الأول الصف الثاني نحصل على المعادلة التالية :

$$5y+(1-y)=3y+4(1-y)\Rightarrow y=\frac{3}{5}$$

نحسب قيمة العائد.

نحسب مكاسب اللاعب الأول :

$$\frac{3}{5}\left[5\left(\frac{1}{5}\right)+3\left(\frac{4}{5}\right)\right]+\frac{2}{5}\left[1\left(\frac{1}{5}\right)+4\left(\frac{4}{5}\right)\right]=\frac{17}{5}$$

اللاعب الثاني

اللاعب الأول

$$\begin{bmatrix}1 & 5\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{matrix}\frac{1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{matrix}\qquad \frac{2}{5}\quad \frac{3}{5}$$

نحسب خسارة اللاعب الثاني :

$$\frac{1}{5}\left[5\left(\frac{3}{5}\right)+1\left(\frac{2}{5}\right)\right]+\frac{4}{5}\left[3\left(\frac{3}{5}\right)+4\left(\frac{2}{5}\right)\right]=\frac{17}{5}$$

النتيجة : ما يربحه أحدهما يخسره اللاعب الآخر.

الطريقة الحسابية المبسطة

الخطوة الأولى : نطرح القيمة الصغرى في كل صف من القيمة الكبرى وكذلك الحال بالنسبة لكل عمود.

الخطوة الثانية : تبادل الأماكن للأعداد نتيجة لعملية الطرح ثم نجمع الأعداد فنحصل على :

اللاعب الثاني / اللاعب الأول

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \frac{2}{2} & \frac{3}{5} \end{matrix}$$

اللاعب الثاني / اللاعب الأول

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5-1=4 \\ 4-3=1 \\ 4-1=3 \end{matrix}$$

$$4-1=3 \qquad 5-3=2$$

$$2+3=5$$

$$\frac{4}{5}=1-x=80\%, \quad \frac{1}{5}=x=20\%$$

$$\frac{2}{5}=1-y=40\%, \quad \frac{3}{5}=y=60\%$$

أخيرا نقسم النتائج على المجموع 5 فنجد في الأخير النتائج التالية :

$$(1-x)=80\% \qquad x=\frac{1}{5}=20\%$$

$$(1-y)=40\% \qquad y=\frac{3}{5}=60\%$$

مراجعة عامة

تمرين رقم 1 : لدينا مصفوفة الدفع التالية : والخاصة بلاعبين. في هذا المثال نلاحظ أنه لا يوجد نقطة سرج لأن $4 \neq 3$

اللاعب الثاني / اللاعب الأول

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (x) \\ (1-x) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 4 & 3 \\ (y) & (1-y) \end{matrix}$$

نعطي لكل لاعب إمكانية أن يلعب إحدى الاستراتيجيتين. بالنسبة للاعب الأول يلعب الصف الأول x من الوقت. والصف الثاني $(1-x)$ من الوقت. أما اللاعب الثاني فإنه يلعب y وقت العمود الأول و$(1-y)$ وقت العمود الثاني. نحسب الأمل الرياضي لتوقعات كل لاعب فنحصل على :

$$E(x) = 2xy + 6x(1-y) + 4y(1-x) + 3(1-x)(1-y)$$

$$E(x) = -5xy + 3x + y + 3 = -5\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(y - \frac{3}{5}\right) + \frac{18}{5}$$

إذا افترضنا أن الوقت $x = \frac{1}{5} = 20\%$ يحقق اللاعب الأول ربحا قدره $\frac{18}{5}$ مهما كانت قيمة y أي مهما كانت استراتيجية اللاعب الثاني إذن يلعب اللاعب الأول السطر الأول 20% والسطر الثاني 80%.

بنفس الطريقة نحدد قيمة y ونحصل على $y = \frac{3}{5}$ أما $(1-y) = \frac{2}{5}$.

أخيرا بالنسبة لعائد الربح أو الخسارة لكل لاعب لدينا العناصر التالية :

بالنسبة للاعب الأول، إذا اختار اللاعب الثاني الاستراتيجية الأولى :

$$E_1(x) = 2x + 4(1-x) = 4 - 2x$$

أما إذا اختار الاستراتيجية الثانية فنحصل على :

$$E_2(x) = 6x + 3(1-x) = 3x + 3$$

هناك نوع من الاستقرار والتوازن مهما كانت استراتيجية اللاعب الثاني إذا تعادلت كل من $E_1 = E_2$. $4 - 2x = 3x + 3 \Rightarrow x = \frac{1}{5} = 20\%$

أما قيمة المباراة فتساوي $V = \frac{18}{5}$

نقوم بنفس العملية بالنسبة للاعب الثاني. إذا لعب اللاعب الأول الاستراتيجية الأولى نجد : $E_1(y)=2y+6(1-y)=6-4y$

أما إذا لعب اللاعب الأول الاستراتيجية الثانية

$$E_2(y)=4y+3(1-y)=y+5$$

هناك نوع من الاستقرار والتوازن عندما نعادل $E_1(y)=E_2(y)$

إذن قيمة خسارة اللاعب الثاني

$$6-4y=y+3 \Rightarrow y=60\%=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{18}{5}=V$$

الطريقة الحسابية المبسطة

الخطوة الأولى : نحسب الفارق بين القيمة العظمى والصغرى لكل صف وعمود.

اللاعب الثاني

اللاعب الأول

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6-2=4 \\ 4-3=1 \end{matrix} \Big\} 5$$

$$4-2=2 \quad 6-3=3 \quad \rightarrow 5$$

الخطوة الثانية : نبدل المواضع بالأرقام ونقسم النتيجة على المجموع 5 فنحصل على الأعداد التالية :

$x = 20\%$ $\quad 1-x=80\%$

$y = 60\%$ $\quad 1-y=40\%$

مكسب اللاعب الأول : $\frac{2}{5}\left[3\left(\frac{4}{5}\right)+6\left(\frac{1}{5}\right)\right]+\frac{3}{5}\left[4\left(\frac{4}{5}\right)+2\left(\frac{1}{5}\right)\right]=\frac{18}{5}$

خسارة اللاعب الثاني : $\frac{4}{5}\left[3\left(\frac{2}{5}\right)+4\left(\frac{3}{5}\right)\right]+\frac{1}{5}\left[6\left(\frac{2}{5}\right)+2\left(\frac{3}{5}\right)\right]=\frac{18}{5}$

النتيجة : نلاحظ أن مكاسب اللاعب الأول = خسارة اللاعب الثاني = $\frac{18}{5}$.

تمرين رقم 2 : لدينا مصفوفة العائد للاعبين نجد في هذا المثال بأنه لا يوجد نقطة سرج لأن $6 \neq 5$ فاللاعب الأول يقتنع بربح قدره 5دج، لذلك يفضل الاستراتيجية الأولى.

الثاني / الأول	1	2
1	$6\alpha P$	$\alpha 5(1-P)$
2	$(1-\alpha)4P$	$8(1-\alpha)$ $(1-P)$

أما اللاعب الثاني فيقبل بخسارة قدرها 6دج، لذلك يفضل الاستراتيجية الأولى أو العمود الأول. لكنه يلاحظ بأن اللاعب الأول يقبل بربح قدره 5دج لذلك يلعب من حين لآخر الاستراتيجية (2) كذلك الحال بالنسبة للاعب الأول يلعب الاستراتيجية الثانية من حين لآخر.

النتيجة : سوف يغير اللاعبان من استراتيجية اللعب حتى يجدا نقطة التوازن ما بين (5 و6دج) يقوم اللاعب الثاني باختيار استراتيجية مركبة.

يعطي للاستراتيجية الأول احتمال P وللثانية احتمال $(1-P)$ كذلك الحال بالنسبة للاعب الأول يعطي الاستراتيجية الأولى احتمال α والثانية $(1-\alpha)$.

نحسب الأمل الرياضي لكل لاعب فنحصل على :

$$E(A) = 6P\alpha + 5\alpha(1-P) + 4P(1-\alpha) + 8(1-\alpha)(1-P)$$
$$= P(5\alpha - 4) - 3\alpha + 8$$

إذا أعطينا $\alpha = \frac{4}{5}$ نجد أن القيمة لا تتضمن الاحتمال P فالأمل الرياضي :

$$E(A) = 8 - 3\left(\frac{4}{5}\right) = 5,6 \; .$$

إذن الربح الوسطي هو 5,6 دينار، إذن اللاعب الأول يلعب الاستراتيجية الأولى بنسبة $\alpha = 80\%$ والاستراتيجية الثانية بنسبة 20%.

بنفس الطريقة نحسب النسب بالنسبة للاعب الثاني فنجد أنه يلعب الاستراتيجية الأولى بنسبة $P = 60\%$ والاستراتيجية الثانية بنسبة $(1-P) = 40\%$.

تمرين رقم 3 : لدينا مصفوفة الدفع التالية :

في هذا المثال نلاحظ أنه لا يوجد نقطة سرج لأن $3 \neq 2$.

اللاعب الثاني

اللاعب الأول

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix}$$

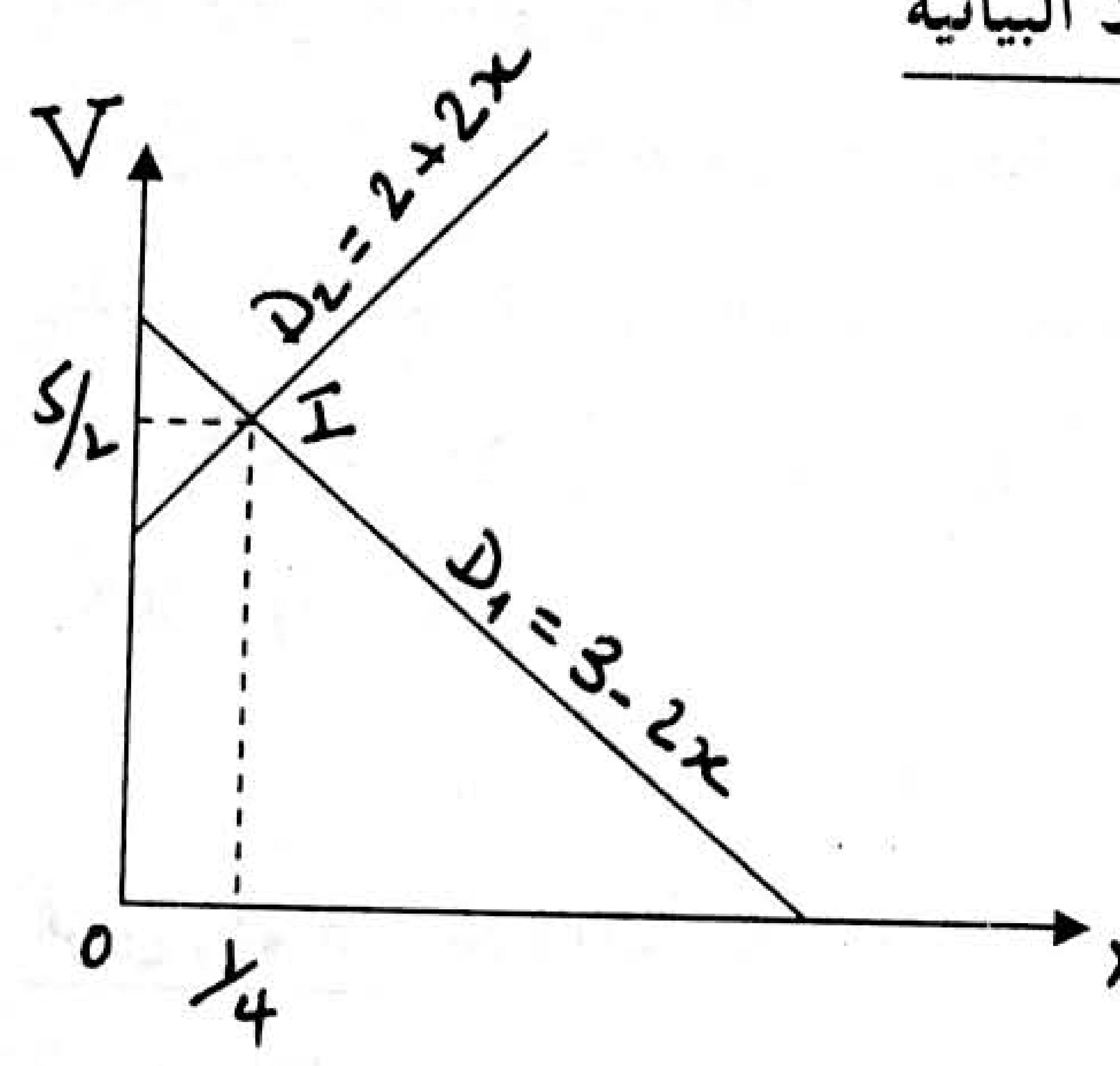
نفترض أن اللاعب الأول يلعب السطر الأول x من الوقت ويلعب السطر الثاني $(1-x)$ من الوقت. بينما اللاعب الثاني يلعب العمود الأول y من الوقت والعمود الثاني $(1-y)$ من الوقت. نحسب الأمل الرياضي لكل لاعب فنحصل على :

$$E(A) = 1xy + 4x(1-y) + 3y(1-x) + 2(1-x)(1-y) =$$
$$E(A) = +4xy + 2x + y + 2 =$$
$$E(A) = -4\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}$$

إذا افترضنا $x = 25\% \Leftarrow V = \frac{5}{2}$ تمثل قيمة الربح.

وإذا افترضنا $y = 50\%$ إذن $V = \frac{5}{2}$ تمثل خسارة اللاعب الثاني.

الخطوط البيانية



نرسم المستقيمين التاليين :

$$1x + 3(1-x) \geq V \Rightarrow D_1 = 3-2x$$

$$4x + 2(1-x) \geq V \Rightarrow D_2 = 2+2x$$

هذان المستقيمان يتقاطعان في النقطة

I إحداثياتها هي :

$$\left(x = \frac{1}{4} \ , \ V = \frac{5}{2}\right)$$

تمرين رقم 4 : أذكر الاستراتيجية المثلى لشركتين A وB وكذلك قيمة المباراة بالنسبة لمصفوفة الدفع التالية :

اللاعب B

$$\text{اللاعب A} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

تمرين رقم 5 : نفس السؤال بالنسبة لمصفوفة الدفع التالية :

اللاعب B

$$\text{اللاعب A} \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

تمرين رقم 6 : لدينا مصفوفة الدفع التالية بين لاعبين A وB. نلاحظ في هذا المثال بأنه لا يوجد نقطة سرج $1 \neq 6$.

نفترض أن اللاعب الأول A يلعب السطر الأول x من الوقت والسطر الثاني $(1-x)$ من الوقت، أما اللاعب الثاني فيلعب العمود

اللاعب الثاني

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix}$$

$$6 \qquad 7$$

الأول y من الوقت والعمود الثاني $(1-y)$ من الوقت.

نحسب مكاسب اللاعب الأول.

يلعب B اللاعب الثاني العمود الأول $-3x+6(1-x)=6-9x$

يلعب B اللاعب الثاني العمود الثاني $7x+1(1-x)=1+6x$

هناك نوع من الاستقرار والتوازن مهما كانت استراتيجية اللاعب الثاني

إذا $6-9x=1+6x \Rightarrow x=1/3$

مكسب اللاعب الأول : $V=6-9\left(\frac{1}{3}\right)=3=1+6\left(\frac{1}{3}\right)$

خسارة اللاعب الثاني : يلعب اللاعب الأول الصف الأول :

$-3y+7(1-y)=7-10y$

يلعب اللاعب الأول الصف الثاني : $6y+1(1-y)=1+5y$

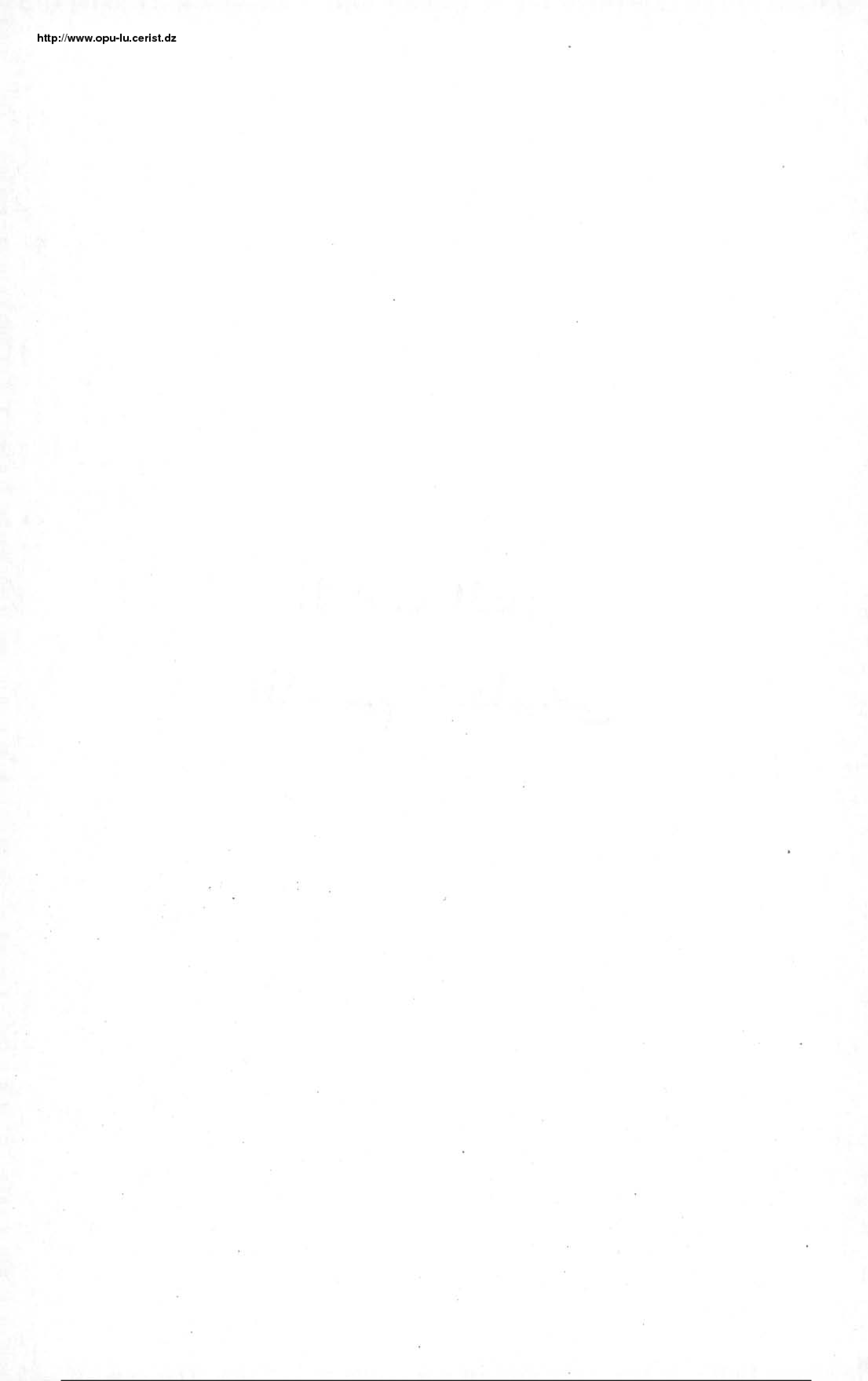
$7-10y=1+5y \Rightarrow y=\frac{2}{5}$

خسارة اللاعب الثاني :

$.V=7-10\left(\frac{2}{5}\right)=3=1+5\left(\frac{2}{5}\right)$



الباب الثاني
القسم التطبيقي



الفصل الأول

جدول ليونتييف

إن الهدف من وضع جدول ليونتييف هو إبراز العلاقة والترابط ما بين كافة القطاعات الاقتصادية. يقسم النشاط الاقتصادي إلى ثلاث قطاعات:

الزراعة، الصناعة، الخدمات. كل قطاع بحاجة ماسة إلى إنتاج القطاعات الأخرى وعلى العكس، كل قطاع يمد القطاعات الأخرى بما تحتاجه من القطاع المذكور. فمثلا القطاع الزراعي بحاجة ماسة إلى الآلات الزراعية من القطاع الصناعي وعلى العكس فالصناعة بحاجة ماسة إلى المواد الأولية كالقطن، يمدها القطاع الزراعي. يسمى جدول ليونتييف بجدول المدخلات المخرجات.

نبطلق من المعادلات التالية: X=AX+D

بحيث أن X تمثل حجم انتاج كل قطاع.

A: تمثل مصفوفة المعاملات الفنية -

D: تمثل الطلب النهائي على كل قطاع.

من هذه المعادلة نحصل على المعادلة التالية:

$$X - AX = D \Rightarrow X[I - A] = D \Rightarrow$$

$$X = [I - A]^{-1}.D$$

مثال

لدينا الجدول التالي:

	الزراعة	الصناعة	الخدمات	الاستهلاك الوسيط	الطلب النهائي	الصادرات	الاستخدامات
الزراعة	8	18	2	28	30	10	68
الصناعة	15	64	15	94	60	10	164
الخدمات	5	5	6	16	25	5	46
القيمة المضافة	30	67	18	115	115	25	278
الإنتاج	58	154	41	253			
الاستيراد	10	10	5	25			
الموارد	68	1064	46	278			

في مثلنا هذا نلاحظ أن جملة الموارد =جملة الاستخدامات=278. كذلك مجموع الطلب النهائي=مجموع القيمة المضافة=115.

نبدأ بحساب مصفوفة المعاملات الفنية A

$$A=\begin{bmatrix}0{,}14 & 0{,}12 & 0{,}05\\ 0{,}26 & 0{,}42 & 0{,}37\\ 0{,}09 & 0{,}03 & 0{,}15\end{bmatrix}$$

نحسب المصفوفة $[I-A]$

أخيرا نحسب مقلوب هذه المصفوفة ونضرب ذلك بشعاع الطلب النهائي فنحصل على إنتاج كل قطاع

$$[I-A]=\begin{bmatrix}0{,}86 & -0{,}12 & -0{,}05\\ -0{,}26 & 0{,}58 & -0{,}37\\ -0{,}09 & -0{,}03 & 0{,}85\end{bmatrix}$$

نفترض أن الطلب النهائي لكل قطاع يزيد حسب النسب التالية: 10% في قطاع الزراعة، 15% في قطاع الصناعة، 20% في قطاع الخدمات.

<u>السؤال</u>: احسب إنتاج كل قطاع بعد هذه الزيادة؟

الحل

يصبح الطلب النهائي بعد الزيادة كالتالي:

$$\begin{bmatrix}D_1=33\\ D_2=69\\ D_3=30\end{bmatrix}$$

نحسب الزيادة في الإنتاج من جراء الزيادة في الطلب النهائي.

ننطلق من المعادلات التالية:

$$\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}=[I-A]^{-1}\begin{bmatrix}33\\ 69\\ 30\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}X_1=67\\ X_2=182\\ X_3=49\end{bmatrix}$$

وبذلك نحصل على إنتاج كل قطاع

نحسب الزيادة في الإنتاج لكل قطاع ونقارنها مع الزيادة في الطلب النهائي

الزراعة	%16	%10
الصناعة	%18	%15
الخدمات	%20	%20

تطبيقات عملية

1- يتكون اقتصاد دولة من ثلاث قطاعات معطاة بالجدول التالي.

تريد الدولة أن تزيد من الطلب النهائي و يرتفع في القطاع الصناعي من 670 إلى 800 وحدة و في الخدمات من 290 إلى 350 وحدة.

السؤال: ما أثر هذه الزيادة على انتاج كل قطاع؟

	الزراعة	الصناعة	الخدمات	الإستهلاك الوسيط	الطلب النهائي	الإنتاج
الزراعة	-	160	16	176	74	250
الصناعة	50	-	80	130	670	800
الخدمات	30	80	-	110	290	400
القيمة المضافة	170	560	304	416	1034	↓
الإنتاج	250	800	400			1450

نبدأ بحساب مصفوفة المعاملات الفنية A،

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0,2 & 0,04\\ 0,2 & 0 & 0,2\\ 0,12 & 0,10 & 0\end{bmatrix}$$

ثم نحسب المصفوفة $[I-A]$، أخيرا نقلب هذه المصفوفة.

$$[I-A]=\begin{bmatrix}1 & -0,2 & -0,04\\ -0,2 & 1 & -0,2\\ -0,12 & -0,10 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow [I-A]^{-1}=\frac{100}{93}\begin{bmatrix}0,98 & 0,20 & 0,08\\ 0,22 & 0,99 & 0,20\\ 0,14 & 0,12 & 0,96\end{bmatrix}$$

لحساب إنتاج كل قطاع نطبق المعادلة التالية:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - A \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 283 \\ X_2 = 952 \\ X_3 = 480 \end{cases}$$

نعيد صياغة الجدول من جديد و نحصل على الجدول:

	الزراعة	الصناعة	الخدمات	الإستهلاك الوسيط	الطلب النهائي	الإنتاج
الزراعة	-	190.4	19.2	209.6	74	283.6
الصناعة	56.6	-	96	152.6	800	952.6
الخدمات	33.9	95.2	-	129.1	350	479.1
القيمة المضافة	192.5	666.4	364.8	1223.7	1224	↓
الإنتاج	283	952	480	←		1715

نلاحظ أن مجموع القيم المضافة = مجموع الطلب النهائي = 1224

1- لدينا الجدول التالي الخاص بالمدخلات و الخرجات

- أحسب مصفوفة المعاملات الفنية A و كذلك كل من المصفوفة $[I - A]$ و مقلوب المصفوفة $[I - A]^{-1}$.
- نفترض أن الطلب النهائي تضاعف في ميدان الصناعة من 300 إلى 600 وحدة. ما أثر ذلك على إنتاج كل قطاع؟.

	الزراعة	الصناعة	التجارة	الإستهلاك الوسيط	الطلب النهائي	الإنتاج
الزراعة	100	200	100	400	160	560
الصناعة	200	300	100	600	300	900
التجارة	60	100	40	200	92	292
مستلزمات الإنتاج	360	600	240	1200	552	1752
القيمة المضافة	200	300	52	552		
المدخلات	560	900	292	1752		

2- لدينا جدول ليونتييف التالي و الخاص بـــ 5 قطاعات

السؤال: ملء الفراغات.

	I	II	III	IV	V	CI	DF	X
I	0	0	20	0	0			50
II	0	0	10	5	24			
III	10	0	0	25	0			
IV	15	0		0	0		15	
V	15	30	0	5	0			80
CI						179		
DF		30					161	
X								

مجموع الطب النهائي = مجموع القيم المضافة

$$\sum VA = \sum DF = 161$$

مجموع الموارد = مجموع الإستخدامات = 340.

الحـــــــل

بالنسبة للقطاع I لدينا الأعداد 20 و30

بالنسبة للقطاع II لدينا الأعداد 39، 21، 60

بالنسبة للقطاع III لدينا الأعداد 35، 65، 100

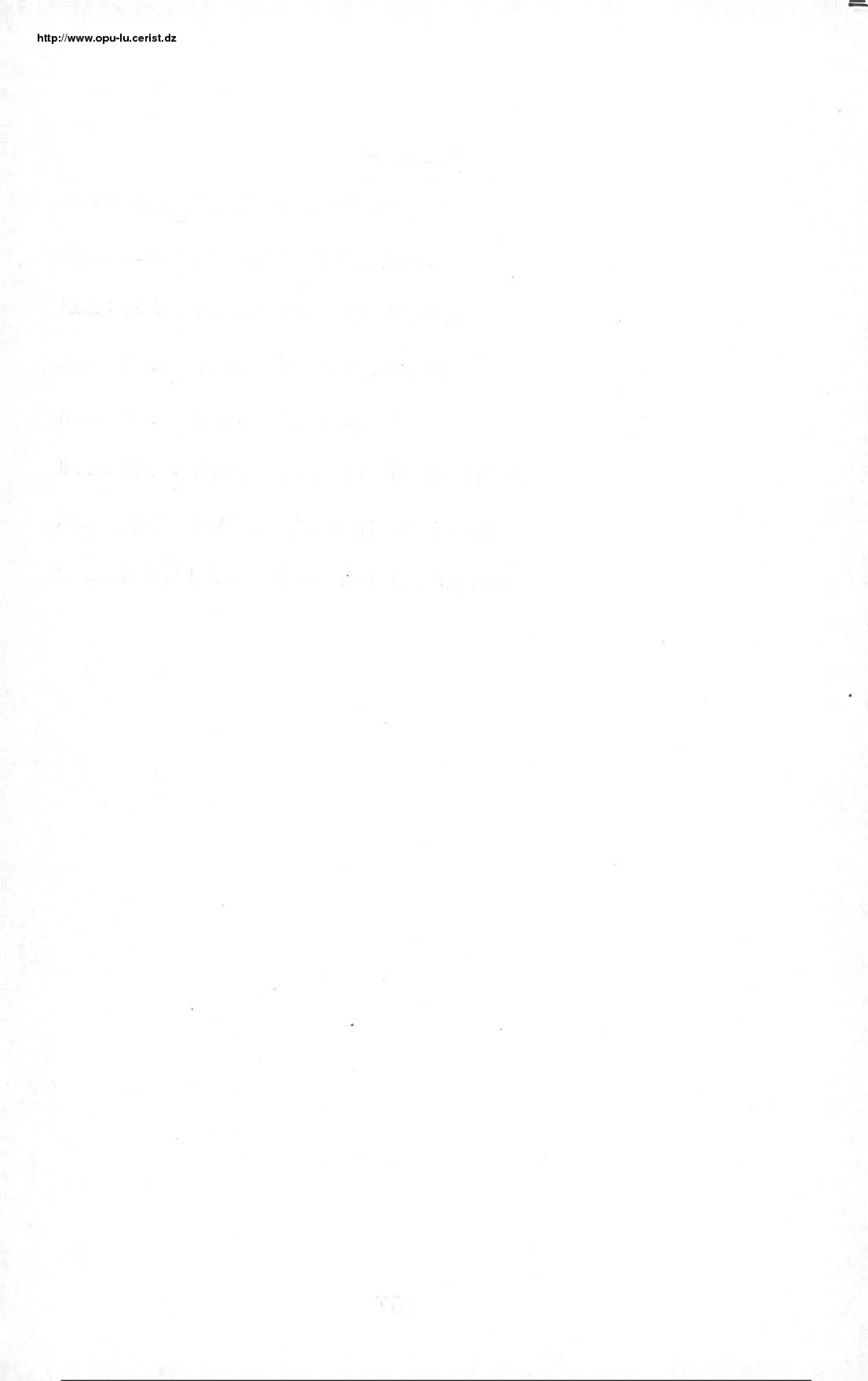
بالنسبة للقطاع IV لدينا الأعداد 20، 35، 50

بالنسبة للقطاع V لدينا الأعداد 50، 30

بالنسبة للقطاع DI لدينا الأعداد 40، 30، 50، 35، 24

بالنسبة للقطاع VA لدينا الأعداد 10، 50، 15، 56

بالنسبة X لدينا الأعداد 50، 60، 100، 50، 80، 340



الفصل الثاني

مفهوم المرونة

تحديدها: إذا كانت لدينا الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق، نسمي مرونة الدالة، النسبة ما بين التغير النسبي للمتغير التابع y والتغير النسبي للمتغير المستقل x، وهي معطاة بالدستور:

$$e = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \boxed{e = y'\left(\frac{x}{y}\right)}$$

مثال: لدينا الدالة $y = x^n$ مشتق الدالة $y = nx^{n-1}$ مرونة الدالة

$$e = y'\left(\frac{x}{y}\right) = nx^{n-1}\left(\frac{x}{x^n}\right) = n$$

مثال: لدينا الدالة $y = e^x$ مشتق الدالة $y' = e^x$ مرونة الدالة

$$e = y'\left(\frac{x}{y}\right) = e^x\left(\frac{x}{e^x}\right) = x$$

في الميدان الاقتصادي:

نفرق ما بين المرونة السعرية ومرونة الدخل

A: المرونة السعرية: نفرق ما بين:

1: مرونة الطلب. 2: مرونة العرض

1: مرونة الطلب. نميز ما بين:

α: المرونة المباشرة: هي النسبة ما بين التغير النسبي في الكمية المطلوبة والتغير النسبي في سعر السلعة. $e = -\frac{dq/q}{dp/p}$ الإشارة تكون سالبة لأن السعر والكمية المطلوبة يسيران باتجاهين معاكسين. نميز هنا ما بين ثلاث حالات:

- طلب غير مرن: كما هو الحال بالنسبة للمواد الغذائية، الطلب عليها غير مرن. قيمة المرونة $|1| \rangle e$
- طلب مرن: كما هو الحال بالنسبة للمواد النصف كمالية، في هذه الحالة قيمة المرونة $|1| \langle e$
- طلب متكافئ المرونة: $|1| = e$ بمعنى أن السعر يزيد بنسبة 10% والكمية المطلوبة تنخفض 10%.

β: المرونة المتقاطعة/ نفترض أننا أمام سلعتين متنافستين أو متممتين.

$$e_{(a,b)} = \frac{dq_a / q_a}{dp_b / p_b}$$

المرونة المتقاطعة تساوي النسبة ما بين التغير النسبي في الكمية المطلوبة من السلعة الأولى على التغير النسبي في السعر بالنسبة للسلعة الثانية.

نميز هذا ما بين حالتين:

- السلعتان متنافستان: مثال القهوة والشاي. فارتفاع سعر القهوة يؤدي إلى انخفاض الطلب عليها وبذلك يزيد الطلب على السلعة المنافسة أي الشاي. في هذه الحالة نجد أن إشارة المرونة موجبة لأن الكمية المطلوبة من السلعة الأولى وسعر السلعة المنافسة لها يتغيران بنفس الاتجاه.

$$p_a \uparrow \Rightarrow q_a \downarrow \Rightarrow q_b \uparrow$$

- السلعتان متممتان: مثال الشاي والسكر. نصل إلى نتيجة معاكسة عندئذ تكون إشارة المرونة سالبة. $p_a \uparrow \Rightarrow q_a \downarrow \Rightarrow q_b \downarrow$

2: مرونة العرض: هي النسبة ما بين التغير النسبي في الكمية المعروضة والتغير النسبي في سعر السلعة وهي معطاة بالدستوى: $e = +\frac{dq / q}{dp / p}$

أما الإشارة فتكون موجبة لأن الكمية المعروضة وسعر السلعة يتغيران بنفس الاتجاه. نميز أيضا ما بين ثلاث حالات:

- عرض غير مرن: كما هو الحال بالنسبة للمواد الغير قابلة للتخزين كالسمك $e \langle |1|$
- عرض مرن: كما هو الحال بالنسبة للسلع القابلة للتخزين قيمة المرونة $e \rangle |1|$
- عرض متكافئ المرونة: $|1| = e$

B: مرونة الدخل

تحديدها: هي النسبة ما بين التغير النسبي في الكمية المطلوبة والتغير النسبي في الدخل. وهي نعطاة بالدستوى. $e_R = \dfrac{dq/q}{dR/R} = \dfrac{dc/c}{dR/R}$

C: ترمز لنفقات الاستهلاك. بالنسبة لإشارة المرونة فهي موجبة لأن الدخل والكمية المطلوبة يتغيران بنفس الاتجاه. يفرق الاقتصادي انجيل ثلاث حالات:

- طلب غير مرن: كالطلب على المواد الغذائية $e \langle 1$
- طلب مرن: كالطلب على الكماليات $e \rangle 1$
- طلب متكافئ المرونة: $e = 1$ كالطلب على الملابس والسكن.

الايراد الكلي والمرونة

إن ايراد المنتج تتأتى من نفقات المستهلك. فالايراد الكلي = حاصل ضرب سعر السلعة بالكمية المطلوبة $R_T = p \times q$. فإذا ما ارتفع سعر السلعة انخفضت الكمية المطلوبة والعكس بالعكس. إن ايراد الكلي تتنازعه قوتان. قوة تجذبه نحو الأعلى

عندما يرتفع سعر السلعة وقوة تجذبه نحو الأسفل عندما تنخفض الكمية المطلوبة.

$+\Delta R = +\Delta p.q$

$-\Delta R = -\Delta q.p$

- نفترض في الحالة الأولى أن محصلة القوتين موجبة أي أن المقدار: $q\Delta p - p\Delta q > 0 \Rightarrow q\Delta p > p\Delta q$ نقسم طرفي المتراجحة على الكمية $q\Delta p$ الموجبة فنحصل على: $\frac{p\Delta q}{q\Delta p} < 1$ أي أن المقدار $\frac{p\Delta q}{q\Delta p}$ يمثل معامل المرونة ونصل إلى النتيجة التالية: $e < |1|$

عندما يرتفع سعر السلعة يزيد الايراد الكلي عندما يكون الطلب غير مرن والعكس بالعكس. بإمكاننا أن نضع الجدول التالي والذي يمثل كافة الحالات.

$e \rightarrow$ / $p \downarrow$	$e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
$p \uparrow$	$R_T \uparrow$	الايراد الكلي لا يتغير	$R_T \downarrow$
$p \downarrow$	$R_T \downarrow$		$R_T \uparrow$

تطبيق عملي: لدينا سلعتين A وB الطلب على السلعة الأولى مرن $e = 2$ وعلى السلعة B غير مرن $e = \frac{1}{2}$. نفترض أن أسعار السلعتين والكميات المطلوبة معطاة بالجدول التالي:

السلع	الأسعار	الكميات	الايراد الكلي
A	10دج	100وحدة	1000دج
B	5دج	200وحدة	1000دج

نفترض أن المنتج بإمكانه التأثير على سعر السلعة ورفعها بنسبة 20% هادفا من وراء ذلك زيادة ايراداته.

السؤال الذي يطرح: كيف يتصرف المنتج لتحقيق هدفه؟

بالنسبة للسلعة الأولى A من مصلحته تخفيض سعر السلعة لأن الطلب مرن.يصبح سعر السلعة الجديد 8دج أما الكمية المطلوبة فتصبح 140وحدة والايراد الكلي يصبح 1120دج.

أما بالنسبة للسلعة الثانية فمن مصلحته رفع السعر، ويصبح السعر الجديد 6دج والكمية المطلوبة 180وحدة والايراد الكلي 1080دج وهكذا نجد أن الايراد الكلي ارتفع في الحالتين.

الايراد الحدي والمرونة

دالة الايراد الحدي هي مشتق دالة الايراد الكلي $R_T = p \times q$

$$R_{M_a} = p + q\frac{dp}{dq}$$

$$e = \frac{dq/q}{dp/p} \Rightarrow \frac{dq}{dp} = e\left(\frac{q}{p}\right) \Rightarrow \frac{dp}{dq} = \frac{1}{e}\left(\frac{p}{q}\right)$$

نعوض ذلك في دالة الايراد الحدي.

$$RM_a = p + q\left(\frac{1}{e}\frac{p}{q}\right) = p\left(1 + \frac{1}{e}\right)$$

تطبيق عملي :

لدينا دالة الطلب $p = 10 - \frac{1}{2}q$

المطلوب حساب الإيراد الحدي بطريقتين.

الحل

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{dq}{dp} = -2$$

$$e = \frac{dq}{dp}\left(\frac{p}{q}\right) = -2\left(\frac{10 - \frac{1}{2}q}{q}\right) = \frac{q-20}{q}$$

$$RM_a = p\left(1 + \frac{1}{e}\right) = \left(10 - \frac{q}{2}\right)\left(1 + \frac{q}{q-20}\right) = 10 - q$$

بإمكاننا أن نصل إلى نفس النتيجة عن طريق الإيراد الكلي.

$$RT = pxq = 10q - \frac{1}{2}q^2$$

$$RM_a = 10 - q$$

مراجعة عامة

1- لدينا دالة الطلب على سلعة ما معطاة بالمعادلة التالية :

$$Q = 10^4 - 0,025p$$

السؤال : أحسب مرونة الطلب السعرية عندما $p = 300.000$

الحل

$$e = \frac{dq}{dp} \times \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{dq}{dp} = -0,025$$

عندما $p = 300.000$ ؛ $e = -\frac{0,025}{10^4 - 0,025p} \times p$

نلاحظ أن الطلب مرن.

$$\boxed{e = -3}$$

2- لدينا دالة الطلب $p = \frac{10}{1+5q}$

<u>السؤال</u> : أحسب الإيراد الحدي بطريقتين.

<u>الحل</u>

الإيراد الكلي = السعر X الكمية $RT = p \times q = \frac{10q}{1+5q}$

الإيراد الحدي = مشتق دالة الإيراد الكلي $RM_a = \frac{10}{(1+5q)^2}$

الطريقة الثانية : نطبق الدستور $RM_a = p\left(1 + \frac{1}{e}\right)$

$$e = \frac{dq}{dp}\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{2}{p^2}\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{2}{pq} = -\frac{2+10q}{10q}$$

إذن الإيراد الحدي = $RM_a = \frac{10}{1+5q}\left(1 - \frac{10q}{2+10q}\right) = \frac{10}{(1+5q)^2}$

3- لدينا دالة الطلب على السلعة الأولى $q_1 = 40 - \frac{1}{2}p$

نريد حساب دالة الطلب على السلعة الثانية مستعينين بالمعلومات التالية : الدالة خطية.يتقاطع المستقيمان في النقطة $A|p = 8|$ كما أن مرونة الطلب بالنسبة

للسعر والخاصة بالسلعة الثانية، تساوي ضعف مرونة الطلب بالنسبة لسعر السلعة الأولى.

السؤال : ما هي معادلة الطلب على السلعة الثانية ؟

الحل

عندما يكون السعر $p = 8$ نجد أن الكمية المطلوبة من السلعة الأولى $q = 36$.

بإمكاننا حساب مرونة الطلب على السلعة الأولى : $e_1 = \frac{dq}{dp}\left(\frac{p_1}{q_1}\right)$

أما بالنسبة للسلعة الثانية : $e_2 = \frac{dq}{dp}\left(\frac{p_2}{q_2}\right)$

كما أنه في نقطة التقاطع A نجد : $\left(\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}\right)$

$$\frac{dq_1}{dp_1} = -\frac{1}{2}\frac{dq_2}{dp_2} = -1 = a$$

أن دالة الطلب على السلعة الثانية هي من الشكل :

$$q_2 = ap_2 + b \Rightarrow q_2 = -p + b$$

من جهة أخرى نجد أن الدالة تمر بالنقطة $A \left| \begin{array}{l} p = 8 \\ q = 36 \end{array} \right.$

$$36 = -8 + b \Rightarrow b = 44$$

لحساب قيمة الثابت b نعوض p و q بقيمها فنجد في هذه الحالة :

$$\boxed{q_2 = -p + 44}$$

4- لدينا دالة الطلب : $q = AR^{0,37}P_1^{-0,43}p_2^{-0,23}$

بحيث أن R تمثل الدخل P_1 و P_2 تمثل الأسعار بالنسبة لكل من السلعة الأولى والثانية المنافسة لها.

السؤال : أحسب المرونات الثلاث ؟

الحل

لحساب المرونات نستخدم اللوغاريتمات.

لحساب مرونة الدخل نفترض أن الأسعار P_1 و P_2 ثابتة.

نفترض ثابت جديد $B = AP_1^{-0,43} p_2^{-0,23}$

فنحصل على الدالة $q = BR\,0,37$. نحسب المشتق اللوغاريتمي

$$\frac{dq}{q} = 0,37\frac{dR}{R} \Rightarrow \boxed{e = 0,37}$$

بنفس الطريقة نحسب المرونة السعرية :

- المرونة المباشرة $e_1 = \dfrac{dq/q}{dp_1/p_1} = -0,43$

- المرونة المتقاطعة $e_2 = \dfrac{dq/q}{dp_2/p_2} = -0,23$

5- لدينا دالة الطلب $q = 20 - 2p_1 - \frac{1}{2}p_2 + 0,01R$

السؤال : أحسب الدوال التالية كذلك المرونات.

الحل

$q_1 = 20 - 2p_1 \quad R = 500 \quad p_2 = 10$ عندما $q_1 = f(p_1)$

$q_2 = 2 - \frac{1}{2}p_2 \quad R = 200 \quad p_1 = 10$ عندما $q_2 = f(p_2)$

$q_3 = f(R)$ عندما $p_1 = 5 \quad p_2 = 10 \quad q_3 = 5 + \frac{R}{100}$

$e_1 = -2\left(\frac{5}{10}\right) = -1$ مرونة متكافئة

$e_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{10}{15}\right) = -\frac{1}{3}$ طلب غير مرن

$e_3 = \frac{1}{100}\left(\frac{1000}{15}\right) = \frac{2}{3}$ طلب غير مرن

6- أحسب مرونة الدوال التالية :

$$y_1 = xe^x \qquad y_2 = xe^{-x} \qquad y_3 = \frac{ax}{x+b}$$

الحل

لحساب المرونة نحسب مشتق الدوال :

$$y_1' = e^x(1+x) \Rightarrow e_1 = \frac{xe^x}{xe^x}(1+x) = 1+x$$

$$y_2' = e^{-x}(1-x) \Rightarrow e_2 = 1-x$$

$$y_3' = \frac{ab}{(x+b)^2} \Rightarrow e_3 = \frac{b}{x+b}$$

7- لدينا دالة الطلب $p = \frac{a}{q}$ بحيث أن (a : ثابت)

السؤال : أحسب الإيراد الحدي بطريقتين.

الحل

الطريقة الأولى : نحسب الإيراد الكلي $RT = p \times q = a$

الإيراد الحدي هو مشتق دالة الإيراد الكلي $RM_a = 0$

الطريقة الثانية : $p=\frac{a}{q}\Rightarrow$ $\quad RM_a=p\left(1+\frac{1}{e}\right)$

$$\frac{dp}{dq}=-\frac{a}{q_2}\Rightarrow\frac{dq}{dp}=-\frac{q^2}{a}\Rightarrow e=-\frac{q^2}{a}\left(\frac{a}{q^2}\right)=-1$$

$$RM_a=p\left(1-\frac{1}{1}\right)=0$$

8- لدينا الدوال الأربع التالية : المطلوب حساب كل من المشتق والمرونة والتابع الأصلي.

2^x	$\frac{1}{x}$	e^x	x^n	الدالة
$2^x L_e 2$	$-\frac{1}{x^2}$	e^x	nx^{n-1}	المشتق
$Le2^x$	-1	x	n	المرونة
$\frac{2^x}{Le2}$	$L_e x$	e^x	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	التكامل

9- برهن على أن مرونة الدالة $q\cdot p^a=b$ هي ثابتة علما بأن (b,a) هي ثوابت.

الحل

الطريقة الأولى : نحسب المشتق اللوغاريتمي $Lq+aLp=Lb$

$$\frac{dq}{q}+a\frac{dp}{p}=0\Rightarrow\frac{dq}{q}=-a\frac{dp}{p}\Rightarrow e=\frac{dq/q}{dp/p}=-a$$

الطريقة الثانية :

$$q = b \cdot p^{-a} \Rightarrow \frac{dq}{dp} = -abp^{-a-1}$$

$$e = \frac{dq / q}{dp / p} = \frac{-abp^{-a-1} \cdot p}{b \cdot p^{-a}} = -a$$

الفصل الثالث

توازن المستهلك

نفترض أن المستهلك رشيد في تصرفاته ويعرف ماذا يختار من السلع التي تحقق له أقصى إشباع ممكن بأقل تكلفة ممكنة. لذلك فهو يقارن ما بين المنفعة التي يجنيها من استهلاك هذه السلع وأسعارها.

إن دالة المنفعة الكلية تكتب على الشكل التالي : $u = f(x, y)$ بحيث أن x و y تمثلان الكميات من السلع. أما u فتمثل المنفعة الكلية وهي تزيد كلما زادت الكميات التي يحصل عليها المستهلك من إحدى السلعتين أو الاثنتين معا.

المفاهيم الأساسية

1- منحنى السواء : هو المحل الهندسي لكافة التوليفات من السلعتين والتي تمنح المستهلك ذات المستوى من الإشباع أو المنفعة.

تكتب المعادلة على الشكل التالي :

$$u_0 = f(x, y)$$

2- خط الميزانية : إن هدف المستهلك هو الحصول على أقصى إشباع ممكن في حدود دخله أو ميزانيته والتي تكتب على الشكل التالي : $B = xp_x + yp_y$ بحيث أن B تمثل الميزانية p_x و p_y تمثل أسعار السلع الافرادية. أما x و y فتمثل الكميات.

3- المعدل الحدي للإحلال : يمثل النسبة في التغير بإحدى الكميتين على التغير في الكمية الأخرى. $T=-\frac{\Delta Y}{\Delta X}$

لحساب ذلك ننطلق من التفاضل الكلي لدالة المنفعة الكلية $u_0=f(x,y)$

$$du_0=f_x dx+f_y dy=0 \Rightarrow f_x dx=-f_y dy$$

$$T=\frac{\Delta Y}{\Delta X}=\frac{f_x}{f_y}=\frac{\text{المنفعة الحدية للسلعة } x}{\text{المنفعة الحدية للسلعة } y}$$

مشكلة المستهلك وطريقة حلها

هناك ثلاث طرق لحل مشكلة المستهلك :

1- الطريقة البيانية : نرسم منحنى السواء وكذلك خط الميزانية. عندما يمس هذا الأخير منحنى السواء في النقطة A فإن إحداثيات هذه النقطة تمثل الكميات x و y الواجب اقتناؤها من السلعتين لتعظيم المنفعة الكلية.

2- الطريقة الجبرية : في نقطة التماس نجد أن ميل خط الميزانية يساوي ميل منحنى السواء أي المعدل الحدي للإحلال. إذن يمكن أن نكتب :

$$\frac{\text{سعر للسلعة } x}{\text{سعر للسلعة } y}=\frac{\text{المنفعة الحدية للسلعة } x}{\text{المنفعة الحدية للسلعة } y} \quad ؛ \quad \frac{p_x}{p_y}=\frac{f_x}{f_y}$$

3- مضاعف لاغرانج : نريد تعظيم دالة المنفعة الكلية تحت قيد الدخل نشكل الصيغة $V=f(x,y)+\lambda(B-xp_x-yp_y)$

ثم نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} = f_x - \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = f_y - \lambda p_y = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f_x = \lambda p_x \\ f_y = \lambda p_y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{f_x}{f_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = B - xp_x - yp_y = 0 \Rightarrow B = xp_x + yp_y$$

وهكذا نصل إلى نفس النتائج كالسابق. لدينا جملة معادلتين لمجهولين تسمح بحساب كل من x و y.

تطبيق عملي :

مستهلك دخله 100دج= R يخصصه لشراء سلعتين. الأسعار الافرادية هي : 5دج = p_y ، 2دج = p_x . دالة المنفعة الكلية $u = xy$.

السؤال : ما هي أفضل توليفة تمنح للمستهلك أقصى إشباع ممكن في حدود دخله ؟

الحل

الطريقة الأولى : مضاعف لاغرانج

دالة الدخل : $R = xp_x + yp_y$

نعوض بقيمها : $100 = 2x + 5y$

نريد تعظيم دالة المنفعة تحت قيد الدخل. نشكل الصيغة :

$$V = xy + \lambda(100 - 2x - 5y)$$

ثم نعدم المشتقات الجزئية الأولى

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} = y - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = x - 5\lambda = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y = 2\lambda \\ x = 5\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = 100 - 2x - 5y = 0 \Rightarrow 100 = 2x + 5y$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين نحلهما فنحصل على :

$$x = 25 \ , \ y = 10 \ , \ u = 250$$

الطريقة الثانية : الجبرية.

لدينا دالة المنفعة الكلية ولدينا أيضا دالة الدخل نعادل ما بينهما :

$$\begin{cases} u = xy \Rightarrow y = \dfrac{u}{x} \\ 100 = 2x + 5y \Rightarrow y = 20 - \dfrac{2}{5}x = \dfrac{u}{x} \Rightarrow \end{cases}$$

نحصل على معادلة من الدرجة الثانية من الشكل التالي :

$$2x^2 - 100x + 5u = 0$$

في نقطة التماس لدينا جذر مشترك $\Delta = 2500 - 10u = 0$

ومنها نحصل على دالة المنفعة الكلية $u = 250 \Rightarrow y = \dfrac{250}{x}$

الميل الحدي للإحلال = مشتق دالة المنفعة الكلية.

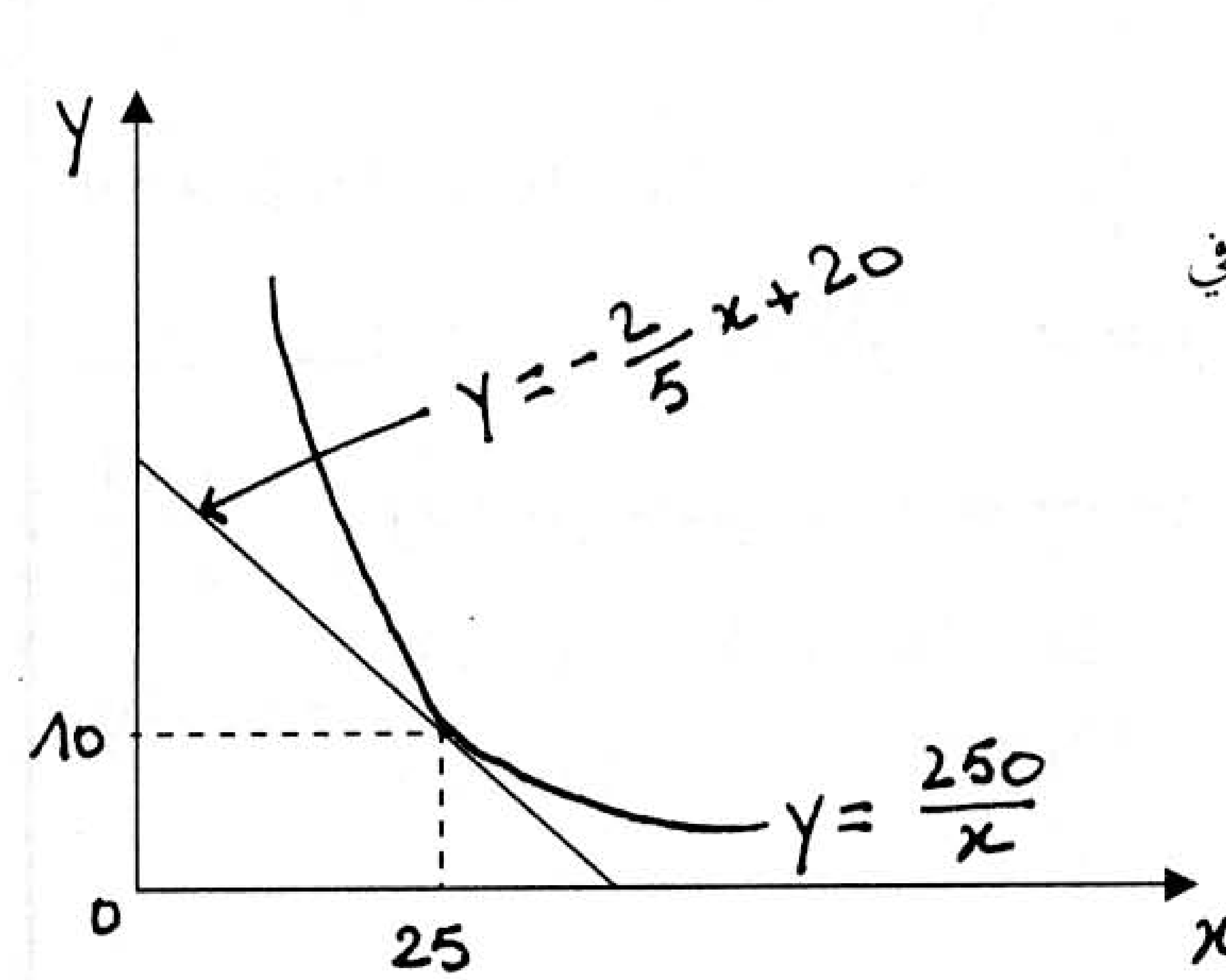
$$T = -\frac{250}{x^2} = -\frac{2}{5} \Rightarrow x^2 = 625 \Rightarrow x = 25$$

نقارن ذلك مع ميل خط الميزانية فنحصل على : $x = 25$, $y = 10$ هذه هي الكميات الواجب اقتناؤها لتعظيم منفعة المستهلك في حدود دخله.

الطريقة الثالثة : الطريقة البيانية

نرسم منحنى السواء $y=\frac{250}{x}$ وكذلك خط الميزانية أو الدخل

$y=-\frac{2}{5}x+20$



نلاحظ أن المستقيم يمس المنحنى في النقطة A إحداثياتها هي:

$(x=25, y=10)$ وهي تمثل الكميات الواجب اقتناؤها من قبل المستهلك لتعظيم منفعته.

مراجعة عامة

1- لدينا دالة المنفعة الكلية $u=(x+2)(y+1)$

لدينا أيضا دالة الدخل $51=2x+5y$

السؤال : ما هي شروط تعظيم دالة المنفعة الكلية ؟

الحل

نستخدم طريقة مضاعف لاغرانج فنحصل على :

$$V=(x+2)(y+1)+\lambda(51-2x-5y)$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial v}{\partial x}=y+1-2\lambda=0\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial y}=x+2-5\lambda=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}2\lambda=y+1\\5\lambda=x+2\end{array}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda}=51-2x-5y=0\Rightarrow 51=2x+5y$$

نشكل النسبة ما بين المعادلتين الأوليتين فنحصل على :

$\dfrac{2}{5}=\dfrac{y+1}{x+2}$ وبالأخير نحصل على جملة معادلتين لمجهولين هما :

$$\begin{Bmatrix}2x-5y=1\\2x+5y=51\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}x=13\\y=5\end{Bmatrix}\Rightarrow u=90$$

2- مستهلك دخله 64دج= R يخصصه لشراء ثلاث سلع أسعارها الافرادية هي على التوالي : 1دج= p_Z ، 4دج= p_y ، 2دج= p_x

لدينا دالة المنفعة الكلية $u=x^2yz$

السؤال : أحسب الكميات التي تعظم دالة المنفعة الكلية ؟

الحل

دالة الدخل $R=64=2x+4y+z$

نحل المسألة بطريقة مضاعف لاغرانج.

نشكل الصيغة $V=x^2yz+\lambda(64-2x-4y-z)$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= 2xyz - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= x^2z - 4\lambda = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= x^2y - \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda &= xyz \\ \lambda &= \frac{x^2z}{4} \\ \lambda &= x^2y \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = 64 - 2x - 4y - z = 0 \Rightarrow 64 = 2x + 4y + z$$

لكي نتخلص من المعامل λ نشكل النسب التالية :

$$\frac{z}{x} = 1 \ ; \ \frac{4y}{z} = 1 \Rightarrow x = z = 4y$$

ومن جهة أخرى لدينا $64 = 2x + 4y + z$

وهكذا نحصل على القيم التالية : $y = 4$ ؛ $x = z = 16$

ومنها نستخرج قيمة المنفعة الكلية $u = 2^{14}$

الطريقة الثانية : طريقة التعويض

ننطلق من دالة الدخل $R = 64 = 2x + 4y + z$

نحسب قيمة z بدلالة x و y فنجد : $z = 64 - 2x - 4y$

نعوضها في دالة المنفعة الكلية $u = x^2y(64 - 2x - 4y)$

لتعظيم هذه الدالة نعدم المشتقات الجزئية الأولى.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 128xy - 6x^2y - 8xy^2 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 64x^2 - 2x^3 - 8x^2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

لدينا معادلتين لمجهولين بحلهما نجد :

$$\left.\begin{cases} 8-y=\dfrac{x}{4} \\ 3x+4y=64 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x=z=16 \\ y=4 \\ u=2^{14} \end{matrix}$$

3- لدينا دالة المنفعة الكلية $u = x_1^2 x_2 + 10$

وأسعار السلع الافرادية $p_{x_1} = 2DA$ ، $p_{x_2} = 4DA$

دخل المستهلك $R = 50DA$

- أوجد الميزانية المثلى للمستهلك ؟

- أحسب دالة الطلب على السلعتين ؟

الحل

دالة دخل المستهلك $50 = 2x_1 + 4x_2$

نريد تعظيم دالة المنفعة الكلية تحت قيد الدخل.

نشكل صيغة لاغرانج التالية :

$$V = x_1^2 x_2 + 10 + \lambda(50 - 2x_1 - 4x_2)$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial x_1} = 2x_1x_2 - 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_2} = x_1^2 - 4\lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2\lambda = 2x_1x_2 \\ 4\lambda = x_1^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = 50 - 2x_1 - 4x_2 = 0 \Rightarrow 50 = 2x_1 + 4x_2$$

نشكل النسبة بينهما فنحصل على $\dfrac{x_1}{2x_2} = 2$ إذن $x_1 = 4x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 50 \\ x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

نعوض x بقيمتها فنحصل على العناصر التالية :

$$x_1 = \frac{50}{3} \qquad x_2 = \frac{50}{12} \qquad u = 1157{,}4$$

دوال الطلب على السلعتين، ننطلق من المعادلات

$$\frac{2x_1x_2}{x_1^2} = \frac{p_{x_1}}{p_{x_2}} <= \frac{\text{سعر السلعة } x_1}{\text{سعر السلعة } x_2} = \frac{\text{المنفعة الحدية } x_1}{\text{المنفعة الحدية } x_2}$$

نعوض ذلك في دالة الدخل

$$\boxed{x_1 = 2x_2 \frac{p_{x_2}}{p_{x_1}}}$$

$$R = x_1 p_{x_1} + x_2 p_{x_2}$$

$$R = p_{x_1}\left(2x_2 \frac{p_{x_2}}{p_{x_1}}\right) + x_2 p_{x_2}$$

$$R = 3x_2 p_{x_2}$$

نعوض x_2 بقيمتها في دالة الدخل.

$$R = x_1 p_{x_1} + p_{x_2}\left(\frac{R}{3p_{x_2}}\right) \Rightarrow p_{x_1} x_1 = \frac{2R}{3}$$

هذه هي دوال الطلب على السلعتين.

4- لدينا دالة المنفعة الكلية $u = xy$ وأسعار السلع الافرادية $p_x = 40DA$ ؛ $p_y = 80DA$ والدخل $R =$ 2400دج

أحسب الكميات x و y التي تعظم دالة المنفعة الكلية ؟

نفترض أن سعر السلعة الأولى انخفض حتى وصل إلى 10دج= p_x

ما أثر ذلك على دخل المستهلك ؟

الحل

دالة الدخل : $2400 = 40x + 80y$

نريد تعظيم دالة المنفعة الكلية تحت قيد الدخل.

إذن نشكل صيغة لاغرانج $V = xy + \lambda(2400 - 40x - 80y)$

ثم نعدم المشتقات الجزئية لهذه الدالة الجديدة.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial v}{\partial x} = y - 40\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = x - 80\lambda = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}y = 40\lambda \\ x = 80\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow$$

نشكل النسبة بينهما فنجد :

$$\frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 2400 - 40x - 80y = 0 \Rightarrow 2400 = 40x + 80y = 160y$$

من المعادلة الأخيرة نجد $u = 450$ $y = 15$ $x = 30$

نعوض x بقيمتها $x = 2y$ فنجد $M_1(x = 30 \ , \ y = 15)$

و منها نجد كل من قيمة المجاهيل x و y و قيمة المنفعة الكلية u

$$M_1(u = 450 \ , \ y = 15 \ , \ x = 30)$$

عندما يتغير سعر السلعة هناك أثران:

أولا: أثر التعويض. نفترض أن المنفعة الكلية لا تتغير $y = \frac{u}{x} = \frac{450}{x}$

نعدم مشتق الدالة $Y' = -\frac{450}{x^2}$ و نقارن ذلك مع ميل خط الميزانية الذي يساوي النسبة ما بين السعرين: $-\frac{450}{x^2} = -\frac{10}{80}$

النتيجة: عندما ينخفض سعر السلعة الأولى ترتفع الكمية المطلوبة من السلعة الثانية المنافسة لها مبدئيا.

$$M_2(u = 450 \quad , \quad y = 7.5 \quad , \quad x = 60)$$

ثانيا: أثر الدخل.

نفترض أن الدخل يبقى على حاله: $2400 = 10x + 80y \Rightarrow x = 240 - 8y$

نشتق هذه الدالة و نعدمها $u = xy = y(240 - 8y)$

يمكن التوصل إلى نفس النتيجة عن طريق مضاعف لارغانج

$$u' = 240 - 16y = 0 \Rightarrow (x = 120 \quad y = 15)$$

و نحسب الكميات $x = 120 \quad , \quad y = 15 \quad , \quad u = 1800$

$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0 = \frac{\partial V}{\partial \lambda} = 0$ نصل إلى نفس النتيجة

5- لدينا دالة المنفعة الكلية:

$u = y(x+1)$ و أسعار السلع الافرادية $P_x = 10, \quad P_y = 40$

- أحسب دالة الطلب على كل من السلعتين.

- أحسب الكميات x و y من السلعتين عندما تكون المنفعة الكلية:

$u_1 = 16$ و $u_2 = 64$

- أحسب قيمة الدخل.

الحـــــــل

دالة الدخل $R = xP_x + yP_y \Rightarrow y = \dfrac{R - xP_x}{P_y}$

دالة المنفعة $u = y(x+1) \Rightarrow y = \dfrac{uP_x}{x+1}$

نعادل ما بينهما $\dfrac{R - xP_x}{P_y} = \dfrac{u}{x+1} \Rightarrow u = (x+1)(\dfrac{R - xP_x}{P_y}$

لتعظيم هذه الدالة نعدم المشتق فنحصل على

$$u = -x^2\frac{P_x}{P_y} - x\frac{R - xP_x}{P_y}$$

$$u' = -2x\frac{P_x}{P_y} - \frac{R - xP_x}{P_y} = 0$$

$$u' = -2xP_x - P_x + R = 0 \Rightarrow R = P_x(2x+1)$$

دالة الطلب على السلعة الأولى: $(2x+1) = \dfrac{R}{P_x} \Rightarrow x = \dfrac{R}{2P_x} - \dfrac{1}{2}$

دالة الطلب على السلعة الثانية: $y = \dfrac{R - P_x}{2P_y}$

يمكن التوصل إلى نفس النتيجة بواسطة مضاعف لاغرانج، نشكل الصيغة التالية: $V = y(x+1) + \lambda(R - xP_x - yP_y)$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial x} = y - \lambda p_x = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = (x+1) - \lambda p_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{y}{p_x} = \dfrac{x+1}{p_x} \\ yp_x = (x+1)p_x \end{array}$$

$$\dfrac{\partial v}{\partial \lambda} = R - xp_x - yp_y = 0 \Rightarrow R = xp_x + yp_y \quad \Rightarrow$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على $x = \frac{R}{2p_x} - \frac{1}{2}$

نفترض قيمة المنفعة الكلية $u_1 = 16$. في نقطة التماس $y = \frac{R + p_x}{2p_y}$

ميل خط الميزانية = المعدل الحدي للإحلال

دالة المنفعة $y = \frac{u}{x+1}$

$$y' = -\frac{u}{(x+1)^2} = -\frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{10}{40} = \frac{16}{(x+1)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow (x+1)^2 = 16 \times 4 = 64$$

$$x+1 = 8 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow y = \frac{16}{8} = 2 \Rightarrow R = 150$$

في الحالة الثانية : $u_2 = 64$

$$-\frac{10}{40} = -\frac{64}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{1}{4}(x+1)^2 = 64$$

$$\frac{1}{2}(x+1) = 8 \Rightarrow x+1 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 4 \end{cases}$$

وهكذا نحصل على : $R = xp_x + yp_y = 10 \times 15 + 40 \times 4 = 310$

6- لدينا دالة المنفعة الكلية $u = 2x + 4y + xy + 8$

لدينا ميزانية مستهلك $50 = 5x + 10y$

السؤال : ما هي شروط تعظيم هذه الدالة تحت قيد الميزانية ؟

الحل

طريقة مضاعف لاغرانج : نشكل الصيغة التالية :

$$V = 2x + 4y + xy + 8 + \lambda(50 - 5x - 10y)$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= 2 + y - 5\lambda = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 4 + x - 10\lambda = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}5\lambda &= 2 + y \\ 10\lambda &= 4 + x\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = 50 - 5x - 10y = 0 \Rightarrow$$

نشكل النسبة بينهما فنحصل على : $\frac{1}{2} = \frac{2+y}{4+x}$

$$\begin{cases} 50 = 5x + 10y \\ x = 2y \end{cases}$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نجد :

نعوض ذلك بدالة الدخل فنحصل على : $50 = 5x + 10y = 20y$

$$y = \frac{5}{2} \quad \text{،} \quad x = 5 \quad \text{،} \quad u = 40{,}5$$

طريقة التعويض

لدينا معادلة الميزانية $50 = 5x + 10y \Rightarrow y = 5 - \frac{1}{2}x$

نعوض ذلك بدالة المنفعة $u = 2x + 4\left(5 - \frac{1}{2}x\right) + x\left(5 - \frac{1}{2}x\right) + 8$

$$u = 28 + 5x - \frac{1}{2}x^2$$

لتعظيم هذه الدالة نعدم المشتق فنحصل على كافة العناصر.

$$u' = 5 - x = 0 \Rightarrow \; y = \frac{5}{2} \quad \text{،} \quad x = 5 \quad \text{،} \quad u = 40{,}5$$

الفصل الرابع

توازن المنتج

مقدمة

كما أن المستهلك يتعرض لمشكلة اختيار السلع التي تمنحه أقصى إشباع ممكن في حدود دخله، كذلك يتعرض المنتج لمشكلة اختيار عوامل الإنتاج من عمل ورأس مال الذي يمنحه أقصى إنتاج بأقل تكلفة ممكنة.

مفاهيم أساسية

1- منحنى الناتج المتساوي : هو المحل الهندسي لكافة التوليفات من عنصري العمل ورأس المال والتي تمنح المنتج نفس حجم الإنتاج $Q_0 = f(K,L)$.

2- المعدل الحدي للإحلال ما بين عاملي الإنتاج (العمل ورأس المال) : يساوي النسبة ما بين التغير في كمية العمل على التغير في كمية رأس المال $T = -\frac{\Delta L}{\Delta K}$. لحساب ذلك، نحسب التفاضل الكلي لدالة الإنتاج

$$Q_0 = f(K,L) \Leftarrow dQ_0 = f_K dK + f_L dL = 0.$$

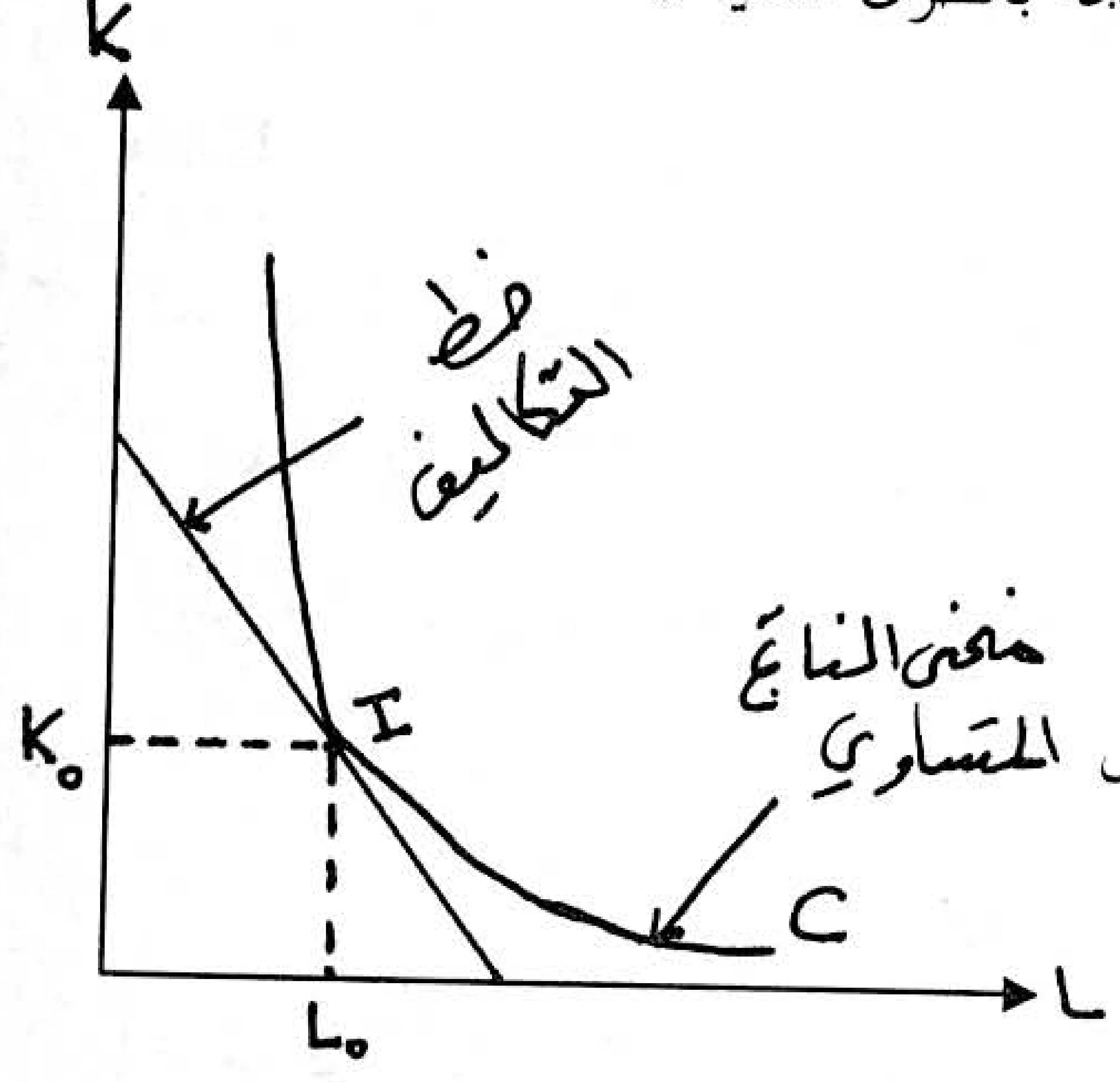
$$T = -\frac{\Delta L}{\Delta K} = \frac{f_K}{f_L} = \frac{\text{الإنتاجية الحدية لرأس المال}}{\text{الإنتاجية الحدية للعمل}}$$

3- خط التكاليف : نفترض أن المنتج يخصص مبلغا معينا من المال نسميه الميزانية لشراء عوامل الإنتاج من عمل ورأس مال وذلك للإنتاج.

إن دالة النفقة الكلية تكتب على الشكل التالي : $CT = Kp_K + Lp_L$

ميل هذا المستقيم يساوي : $-\frac{p_L}{p_K}$ النسبة ما بين أسعار عوامل الإنتاج.

4- السلوك الأمثل للمنتج : يبغي المنتج الحصول على أقصى إنتاج ممكن بأقل تكلفة ممكنة. يمكن التوصل إلى هذه النتيجة بالطرق التالية :



* الطريقة البيانية : نرسم منحنى الناتج المتساوي ومنحنى خط التكاليف. عندما يمس هذا الأخير منحنى الناتج المتساوي في النقطة I فإن إحداثيات هذه النقطة تمثل الكميات اللازمة من عنصري العمل ورأس المال التي تعظم إنتاج المشروع بأقل تكلفة.

* الطريقة الجبرية :في نقطة التماس. ميل خط التكاليف = المعدل الحدي للإحلال.

$$\frac{\text{سعر وحدة رأس المال}}{\text{سعر وحدة العمل}} = \frac{\text{الإنتاجية الحدية لراس المال}}{\text{الإنتاجية الحدية للعمل}} \qquad \frac{p_K}{p_L} = \frac{f_K}{f_L}$$

* طريقة مضاعف لاغرانج :

نريد تعظيم دالة الإنتاج تحت قيد النفقة الكلية. نشكل الصيغة $V = f(K, L) + \lambda(B - Kp_K - Lp_L)$ ونعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial K} &= f_K dK - \lambda p_K = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial L} &= f_L dL - \lambda p_L = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f_K &= \lambda p_K \\ f_L &= \lambda p_L \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

نشكل النسبة بينهما فنحصل على: $\frac{f_K}{f_L}=\frac{p_K}{p_L}$ وهي نفس النتيجة التي وجدناها سابقا.

في بعض الأحيان نريد تخفيض تكاليف الانتاج عند حجم انتاج معين.

نشكل صيغة لاغرانج $V = Kp_K + Lp_L + \lambda[Q_0 - f(K,L)]$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial K} = p_K - \lambda f_K = 0\\ \frac{\partial V}{\partial L} = p_L - \lambda f_L = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}p_K = \lambda f_K\\ p_L = \lambda f_L\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

نشكل النسبة بينهما فنجد: $\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow Q_0 = f(K,L)$

$$\frac{f_K}{f_L} = \frac{p_K}{p_L}$$

دالة الإنتاج

تحديدها: هي علاقة رياضية تربط ما بين عوامل الانتاج والكمية المنتجة. تكتب على الشكل التالي: $Q = f(K,L)$

Q : تمثل حجم الانتاج. K تمثل رأس المال. L: العمل. أن أشهر دوال الانتاج هي دالة كوب دوغلاس وتكتب على الشكل التالي: $Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ بحيث أن A وα تمثل ثوابت. K عنصر رأس المال. L العمل.

بعض المفاهيم الأساسية

- نعرف الإنتاجية الكلية لعنصر العمل بأنها الكمية Q من السلعة المنتجة الناجمة عن استخدام كميات مختلفة من عنصر العمل L وكمية ثابتة من عنصر راس المال K.
  - الانتاجية الكلية للعمل $Q = f(K_0, L)$
  - الانتاجية الكلية لرأس المال $Q = f(K, L_0)$
- نعرف الانتاجية المتوسطة للعمل عند المستوى الثابت من رأس المال K_0 على أنها انتاجية الوحدة من العمل وتساوي: الانتاجية الكلية للعمل مقسومة على الكمية المستخدمة من عنصر العمل. وتكتب على الشكل التالي:

$$\frac{Q}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

وكذلك الحال بالنسبة لرأس المال: $\frac{Q}{K} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{K} = A\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha}$

* نعرف الانتاجية الحدية لعنصر العمل بأنها معدل التغيير للأنتاجية الكليئة للعمل عندما يتغير عنصر العمل بوحدة واحدة. نعبر عن ذلك رياضيا بالمشتق الجزئي لدالة الانتاج: $\frac{\partial Q}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} = (1-\alpha)\left(\frac{Q}{L}\right)$

وكذلك الحال بالنسبة لرأس المال $\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \alpha\left(\frac{Q}{K}\right)$

خصائص دالة كوب دوغلاس

1- هذه الدالة متجانسة من الدرجة الأولى، يقال عن دالة $y = f(x)$ بأنها متجانسة من الدرجة k فيما إذا تحقق لدينا من أجل كل قيمة t صحة العلاقة

الرياضية: $f(t_x,t_y)=t^k f(x,y)$.بمعنى آخر إذا ضاعفنا عوامل الانتاج t مرة يزيد حجم الانتاج t^k مرة بحيث أن k تمثل درجة تجانس الدالة. نطبق ذلك على دالة كوب دوغلاس فنحصل على :

$$A(tk)^{\alpha}(tl)^{1-\alpha} = AK^{\alpha}l^{1-\alpha}.t^{\alpha}t^{1-\alpha} = tQ$$

في هذه الحال نجد أن $k=1$ إذن الدالة متجانسة من الدرجة الأولى.

2- بما أن الدالة متجانسة يمكن أن نطبق عليها قانون أولير:

$$xf_x + yf_y = Kf(x,y)$$

نطبق ذلك على الدالة كوب دوغلاس فنجد:

$$K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L} = K\alpha(\frac{Q}{K}) + L(1-\alpha)(\frac{Q}{L}) = Q$$

هذا يعني أن الدالة متجانسة من الدرجة الأولى.

تطبيق عملي: لدينا الدالة: $Z = x^2 - 4xy + 3y^2$

- هل هذه الدالة متجانسة؟ ما هي درجة تجانسها؟.
- طبق قانون أواير.

الحل

نضرب المجاهيل x و y بـــ t فنحصل على:

$$Z = (xt)^2 - 4(xt)(yt) + 3(yt)^2 =$$

$$Z = x^2t^2 - 4xyt^2 + 3y^2t^2 = t^2(x^2 - 4xy + 3y^2)$$

إذن الدالة متجانسة من الدرجة الثانية.

لكي نطبق قانون أولير نحسب المشتقات الجزئية من الدرجة الأولى:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = -4x + 6y \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = 2x - 4y$$

$$xf_x + yf_y = x(2x-4y) + y(-4x+6y) =$$
$$2(x^2-4xy+3y^2) = 2Z = kZ$$

و منها نستنتج أن الدالة متجانسة من الدرجة الثانية $K = 2$

بعض المفاهيم الأساسية

- نسمي مرونة الدالة بالنسبة لرأس المال: التغيير النسبي في الكمية المنتجة على التغير النسبي لرأس المال.

$$e = \frac{\partial Q/Q}{\partial K/K} = \frac{\partial Q}{\partial K}(\frac{K}{Q}) = \alpha$$

- مرونة الدالة بالنسبة لعنصر العمل $(1-\alpha)$ $e = \frac{\partial Q/Q}{\partial L/L} = \frac{\partial Q}{\partial L}(\frac{L}{Q}) = (1-\alpha)$

يمكن تعريف المرونة بأنها النسبة ما بين الإنتاجية الحدية للعنصر على الإنتاجية المتوسطة لنفس العنصر.

الإنتاجية الحدية للعمل: $\frac{\partial Q}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$

الإنتاجية المتوسطة للعمل: $\frac{Q}{L} = AK^{\alpha}L^{-\alpha}$

إذن قيمة المرونة تساوي: $e = \frac{\partial Q/Q}{\partial L/L} = \frac{(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}}{AK^{\alpha}L^{-\alpha}} = 1-\alpha$

و كذلك الحال بالنسبة لعنصر رأس المال.

الإنتاجية المتوسطة للعمل: $\frac{Q}{K} = AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}$

الإنتاجية الحدية للعمل: $\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}$

إذن قيمة المرونة تساوي: $e = \frac{\partial Q/\partial K}{Q/K} = \alpha$

- نسمي الميل الحدي للإحلال المقدار $T = \frac{dK}{dL} = (\frac{1-\alpha}{\alpha})(\frac{K}{L})$

نحسب التفاضل الكلي لدالة الإنتاج:

$$dQ = \alpha AK^{\alpha-1}L^{\alpha-1}dK + (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}dL = 0$$

$$\alpha AK^{\alpha-1}L^{\alpha-1}dK = -(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}dL \Rightarrow$$

$$\overline{T} = \frac{dK}{dL} = (\frac{1-\alpha}{\alpha})(\frac{K}{L})$$

- نسمي مرونة الإحلال المقدار $\sigma = \frac{du/u}{dT/T}$

$$u = \frac{K}{L} \qquad T = (\frac{1-\alpha}{\alpha})u$$

النتيجة: إن مرونة الإحلال بالنسبة لدالة كوب دوغلاس تساوي الواحد

$$\sigma = \frac{du/u}{(\frac{1-\alpha}{\alpha})u/(\frac{1-\alpha}{\alpha})du} = 1$$

تطبيق عملي: لدينا دالة الإنتاج $Q = 10KL^2 - (KL)^3$

نفترض أن عنصر رأس المال ثابت $K = 1$

- أحسب الإنتاجية الكلية و المتوسطة و الحدية للعمل؟
- ما هو حجم الإنتاج الأعظم و حجم العمل الذي يعظم الإنتاج؟
- ارسم الخطوط البيانية. أين يتقاطع منحنى الإنتاجية الحدية و المتوسطة؟

الحل

- الإنتاجية الكلية للعمل عندما $K = 1$ $\quad Q = 10L^2 - L^3$
- الإنتاجية المتوسطة للعمل $\quad \frac{Q}{L} = 10L - L^2$
- الإنتاجية الحدية للعمل $\quad \frac{dQ}{dL} = 20L - 3L^2$

- يمر حجم الإنتاج الكلي بحده الأقصى عندما ينعدم مشتق الدالة أي عندما تنعدم دالة الإنتاجية الحدية $\frac{dQ}{dL} = 20L - 3L^2 = 0$

$$\Rightarrow L = \frac{20}{3} \Rightarrow Q \approx 148$$

- يتقاطع منحنى الإنتاجية الحدية مع منحنى الإنتاجية المتوسطة عندما يمر هذا المنحنى الأخير بحده الأقصى أي عندما ينعدم مشتق هذه الدالة. $(\frac{Q}{L})' = 10 - 2L = 0 \Rightarrow L = 5$

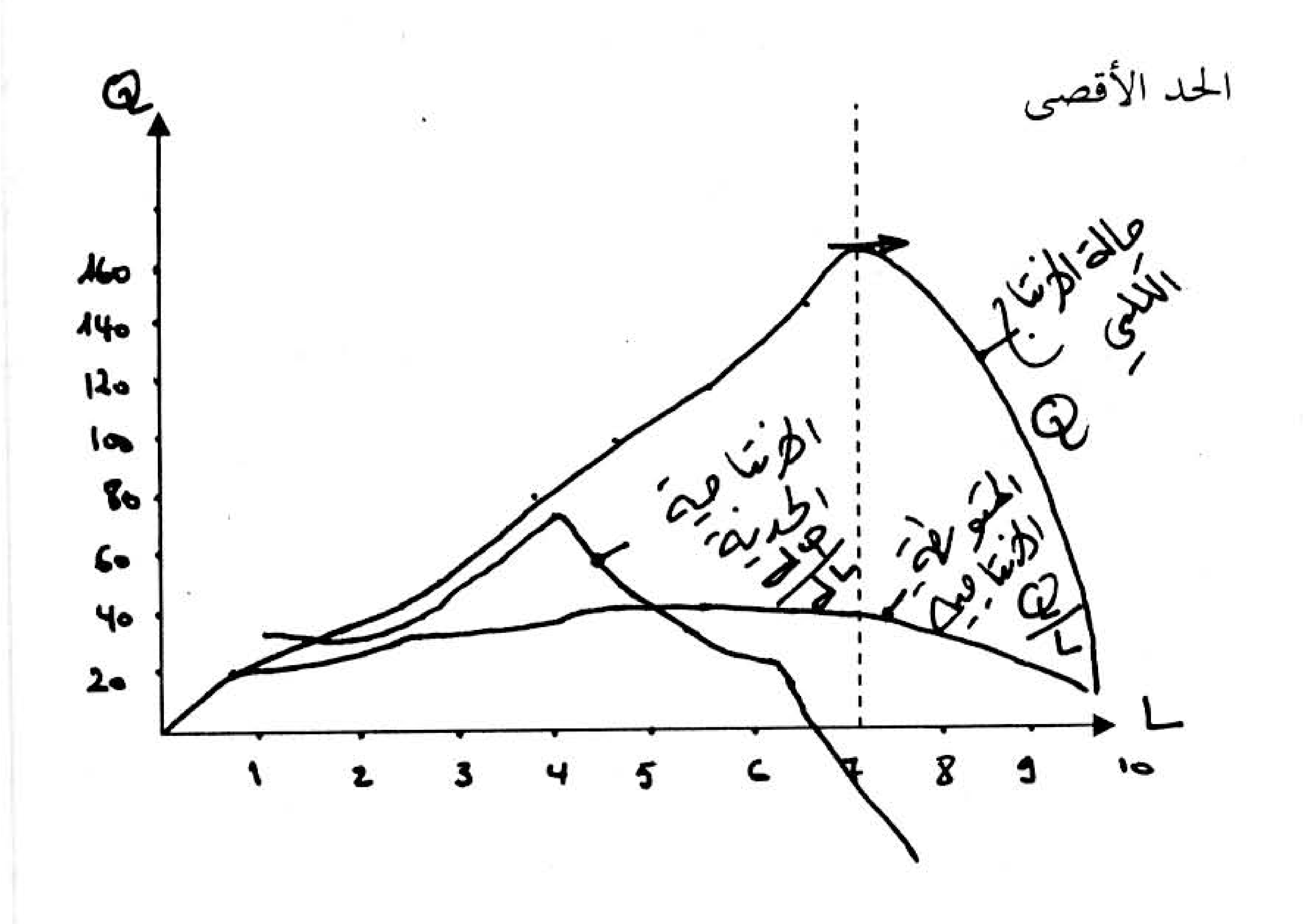
في هذه الحال قيمة الإنتاجية المتوسطة=الإنتاجية الحدية=25.

ملاحظة: بالنسبة لمنحنى الانتاجية الحدية نلاحظ أن هذه الدالة تمر بحدها الأقصى عندما $Q = 3$. كان الإنتاج قبل هذه القيمة يزيد بنسب متزايدة و بعد هذه القيمة صار الإنتاج يزيد بنسب متناقصة. تنعدم الدالة عندما $Q = \frac{20}{3}$. في هذه الحال يمر الإنتاج الكلي بحده الأقصى: $Q = 148$. أما منحنى الإنتاجية المتوسطة و الحدية فيتقاطعان عندما $Q = 5$. قيمة حجم الإنتاجية المتوسطة و الحدية=25.

الجدول:

العمل	حجم الإنتاج	الإنتاجية المتوسطة	الإنتاجية الحدية
1	9	9	17
2	32	16	28
3	63	21	51
4	96	24	32
5	125	25	25
6	144	24	12
7	147	21	7-
8	128	16	32-
9	81	9	
10	0	0	/

الخطوط البيانية



1- لدينا دالة الإنتاج $Q = 4KL$

و أسعار عوامل الإنتاج $P_K = 5$ ، $P_L = 10$

السؤال: ما هو أقصى إنتاج ممكن يقابل نفقة كلية =100. أحسب النفقة المتوسطة و الحدية؟

الحل

دالة النفقة الكلية $CT = 100 = 5K + 10L$

نريد تعظيم دالة الإنتاج تحت قيد النفقة الكلية. نشكل صيغة لاغرانج

$$V = 4KL + \lambda(100 - 5K - 10L)$$

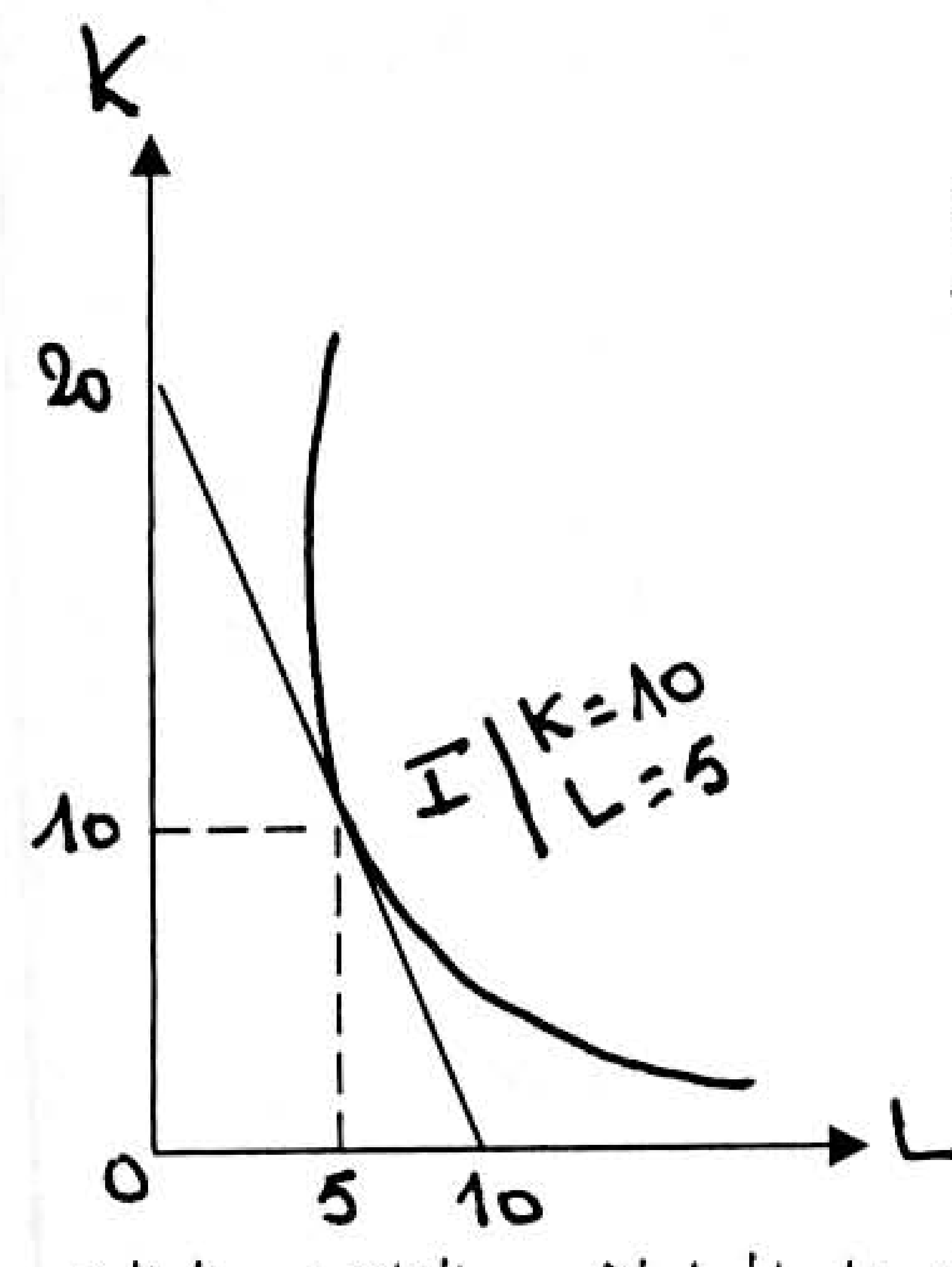
شرط تعظيم الدالة أن نعدم المشتقات الجزئية الأولى.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial K} = 4L - 5\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial L} = 4K - 10\lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4L = 5\lambda \\ 4K = 10\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 100 - 5K - 10L = 0 \Rightarrow 100 = 5K + 10L$$

نشكل النسبة بينهما فنحصل على: $K = 2L \Leftarrow \dfrac{K}{L} = 2$

$L = 5 \qquad K = 10 \qquad Q = 200$



الخطوط البيانية

نرسم منحنى الناتج المتساوي $K=\frac{50}{L}$

وكذلك خط التكاليف $K=20-2L$

يمس خط التكاليف منحنى الناتج المتساوي

في النقطة I احداثياتها هي: $(L=5, K=10)$

حجم الإنتاج المقابل Q=200.

حساب النفقة المتوسطة والحدية بدلالة Q لدينا المعادلات الثلاث التالية:

$$CT=5K+10L, \qquad Q=4KL, \qquad K=2L$$

دالة النفقة الكلية	دالة النفقة المتوسطة	دالة النفقة الحدية
$CT=20\sqrt{\frac{Q}{8}}$	$CM_0=20\sqrt{\frac{1}{8Q}}$	$CM_a=\frac{10}{\sqrt{8Q}}$

2- لدينا دالة الإنتاج التالية: $Q=4x^{2/3}y^{1/3}$

- احسب الإنتاجية المتوسطة و الحدية لكل عامل انتاج.

- لدينا أسعار عوامل الإنتاج $P_x=2$ ، $P_y=3$ ما هو الحد الأدنى لتكاليف الإنتاج الموافق لحجم الإنتاج $Q=100$. احسب الكميات x و y الموافقة لذلك.

أحسب التكاليف المتوسطة و الحدية. لدينا $\sqrt[3]{9}\approx 2,08$ ، $\sqrt[3]{12}\approx 2,29$ و

$$\sqrt{\frac{1}{9,16}}\approx 0,33$$

- نفترض أن كمية عامل الإنتاج $Y=12$. اشتق المعادلات الخاصة بالكلفة المتوسطة و الحدية.

الحل

الإنتاجية الحدية للعامل x : $\frac{dQ}{dx}=\frac{8}{3}x^{\frac{-1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$

الإنتاجية الحدية للعامل y : $\frac{dQ}{dy}=\frac{4}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{-2}{3}}$

الإنتاجية المتوسطة x : $\frac{Q}{x}=4x^{\frac{-1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$

الإنتاجية المتوسطة y : $\frac{Q}{y}=4x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{-2}{3}}$

خط التكاليف: $CT=2x+3y$

نريد تخفيض كلفة الإنتاج عند حجم انتاج معين. نشكل صيغة لاغرانج:

$$V=4x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+\lambda(2x+3y)$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى لتعظيم الدالة.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}&=2-\frac{8}{3}\lambda y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{-1}{3}}=0\\ \frac{\partial V}{\partial y}&=3-\frac{4}{3}\lambda x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{-2}{3}}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}2&=\frac{8}{3}\lambda(\frac{y}{x})^{\frac{1}{3}}\\ 3&=\frac{4}{3}\lambda(\frac{x}{y})^{\frac{2}{3}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda}=100-4y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}=0\Rightarrow 100=4y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow 25=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}\Rightarrow x^2y=25^3$$

من جهة أخرى لدينا $x=3y$ ومنها نجد النفقة الكلية. CT

$$\begin{cases}x=36\\ y=12\\ CT=108\end{cases}$$

نحسب النفقة المتوسطة $CM_0=\frac{CT}{Q}=\frac{108}{100}=1,08$

نثبت $y = 12$ تصبح دالة الإنتاج كالتالي:

$$Q = 4x^{2/3}(12)y^{\frac{1}{3}} = 9,16x^{2/3} \Rightarrow x^{2/3} = \frac{Q}{9,16} \Rightarrow x^{1/3} = \sqrt{\frac{Q}{9,16}} = \frac{1}{3}\sqrt{Q}$$

$$x = (\frac{1}{3})^3 Q^{3/2} = \frac{1}{27}Q^{3/2}$$

دالة النفقة الكلية: $CT = 36 + \frac{2}{27}Q^{3/2}$

دالة النفقة المتوسطة: $CM_0 = \frac{CT}{Q} = \frac{2}{27}Q^{1/2} + \frac{36}{Q}$

دالة النفقة الحدية : $CM_a = (CT)' = \frac{1}{9}\sqrt{Q}$

تصل دالة النفقة المتوسطة عند حدها الأدنى عندما نعدم مشتق الدالة

$$(CM_0)' = 0 \Rightarrow \frac{1}{27}Q^{-1/2} - \frac{36}{Q^2} = 0$$

$$\frac{36}{Q^2} = \frac{1}{27\sqrt{Q}} \Rightarrow Q = 100$$

عند هذا المعدل نجد $CM_0 = CM_a = 1,08$

3- لدينا دالة الإنتاج : $Q = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x.y.z}$

و أسعار عوامل الإنتاج $P_x = 216$ ، $P_y = 64$ ، $P_z = 27$

لدينا سعر المنتج $P = 432$

<u>السؤال</u>: أحسب قيمة الربح في النقطة $A(x = 8, \quad y = 27, \quad z = 64)$

الحـــــــل

الربح=الإيراد الكلي-النفقة الكلية. $\pi = RT - CT =$

$$\pi = 432(\frac{1}{2}\sqrt[3]{xyz} - (216x + 64y + 27z)$$

شرط تعظيم الربح أن نعدم المشتقات الجزئية الأولى.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial x} &= \frac{432}{6}\sqrt[3]{\frac{yz}{x^2}} - 216 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial y} &= \frac{432}{6}\sqrt[3]{\frac{xz}{y^2}} - 64 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial z} &= \frac{432}{6}\sqrt[3]{\frac{xy}{z^2}} - 27 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

نحن أما جملة ثلاث معادلات لثلاث مجاهل.

$$\left.\begin{aligned} yz &= 3^3 x^2 \\ xz &= (\frac{8}{9})^3 y^2 \\ xy &= (\frac{3}{8})^3 z^2 \end{aligned}\right\} A \left\{\begin{aligned} x &= 8 \\ y &= 27 \\ z &= 64 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q = 12$$

نحسب الإيراد الكلي $RT = 432\,x\,12 = 5184$

نحسب النفقة الكلية $CT = 216x8 + 64x27 + 27x64 = 5184$

الربح الإجمالي $\pi = RT - CT = 0$

4- لدينا دالة الإنتاج $X = 24KL - 10K^2 - 8L^2$

أحسب المرونة الجزئية بالنسبة لكل عامل انتاج؟.

أحسب مجموع المرونات الجزئية؟

الحـــــل

$$\frac{\partial X/\partial K}{X/K} = e_K = \frac{4K(6L-5K)}{24KL-10K^2-8L^2}$$

$$\frac{\partial X/\partial L}{X/L} = e_L = \frac{4L(6K-4L)}{24KL-8L^2-10K^2}$$

$$e_K + e_L = \frac{48KL-20K^2-16L^2}{24KL-10K^2-8L^2} = 2 \Rightarrow$$

$$\boxed{e_K + e_L = 2}$$

ملاحظة: معامل المرونة = $\frac{\text{الإنتاجية الحدية لعامل الإنتاج}}{\text{الإنتاجية المتوسطة لعامل الإنتاج}}$

الإنتاجية الحدية للعنصر الأول K: $\frac{\partial X}{\partial K} = 24L - 20K$

الإنتاجية الحدية للعنصر الثاني L: $\frac{\partial X}{\partial L} = 24K - 16L$

الإنتاجية المتوسطة للعنصر الأول K: $\frac{X}{K} = 24L - 10K - \frac{8L^2}{K}$

الإنتاجية المتوسطة للعنصر الثاني L: $\frac{X}{L} = 24K - 8L - \frac{10K^2}{L}$

إذن قيمة المرونة بالنسبة للعنصر الأول $e_k = \frac{\partial X/\partial K}{X/K}$

قيمة المرونة بالنسبة للعنصر الثاني $e_L = \frac{\partial X/\partial L}{X/L}$

5- لدينا دالة الإنتاج $Q = 2K^2 - 4KL + 5L^2$

و أسعار عوامل الإنتاج $P_L = 40$ $\quad P_k = 80$

- أحسب قيمة النفقة الكلية الموافقة لحجم الإنتاج = $Q = 2000$

- أحسب حجم الإنتاج الموافق لنفقة كلية = $CT = 6000$

- أحسب النفقة المتوسطة و الحدية بدلالة حجم الإنتاج.

الحل

نريد تخفيض نفقات الإنتاج عند حجم إنتاج معين. نشكل الصيغة

$$V = (80K + 40L) + \lambda(2000 - 2K^2 + 4KL - 5L^2)$$

لتعظيم هذه الدالة نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial K} &= 80 - 4\lambda K + 4\lambda L = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial L} &= 40 + 4\lambda K - 10\lambda L = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 80 &= 4\lambda(K - L) \\ 40 &= 2\lambda(5L - 2K) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 2000 - 2K^2 + 4KL - 5L^2 = 0 \Rightarrow K = 2L \begin{cases} L = 20 \\ K = 40 \end{cases}$$

إذن النفقة الكلية الموافقة لحجم الإنتاج $Q = 2000$ هي $CT = 4000$.

حساب حجم الإنتاج الموافق لنفقة كلية معلومة. نشكل الصيغة :

$$V = 2K^2 - 4KL + 5L^2 + \lambda(6000 - 80K - 40L)$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial K} &= 4K - 4L - 80\lambda = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial L} &= -4K + 10L - 40\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 80\lambda &= 4K - 4L \\ 40\lambda &= 10L - 4K \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 6000 - 80K - 40L = 0 \Rightarrow \left\{ \frac{1}{2} = \frac{10L - 4K}{4K - 4L} \right.$$

من جهة أخرى لدينا $K = 2L$ نحصل على :

إذن حجم الإنتاج الموافق لنفقة كلية $CT = 6000$ هو $Q = 4500$

حساب النفقة الحدية والمتوسطة بدلالة Q

ننطلق من المعادلات التالية : $K = 2L$

$Q = 2K^2 - 4KL + 5L^2$ ؛ $CT = 80K + 40L$

نعوض $K = 2L$ بدالة النفقة الكلية فنحصل على : $CT = 200L$

وفي دالة الإنتاج نحصل على : $Q = 5L^2$ إذن $L = \sqrt{\frac{Q}{5}}$، نعوض في كل من:

دالة النفقة الكلية : $CT = 200\sqrt{\frac{Q}{5}}$

دالة النفقة المتوسطة : $CM_0 = 200\left(\frac{Q}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$

دالة النفقة الحدية : $CM_a = 100\left(\frac{Q}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$

6- لدينا دالة إنتاج كوب دوغلاس تتطور في الزمن t و $(t-1)$.

لدينا معدل نمو الإنتاج g_x ومعدل نمو رأس المال g_K ومعدل نمو العمل g_L.

برهن على صحة العلاقة الرياضية :

$$(1+g_x) = (1+g_K)^{\alpha}(1+g_L)^{1-\alpha}$$

الحل

في الزمن t لدينا : $x_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$

في الزمن $t-1$ لدينا : $x_{t-1} = AK_{t-1}^{\alpha} L_{t-1}^{1-\alpha}$

نحسب النسبة بينهما : $\frac{x_t}{x_{t-1}} = \left(\frac{K_t}{K_{t-1}}\right)^{\alpha}\left(\frac{L_t}{L_{t-1}}\right)^{1-\alpha}$

نحسب معدلات النمو :

$$g_x = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \Rightarrow 1 + g_x = \frac{x_t}{x_{t-1}}$$

$$g_K = \frac{K_t - K_{t-1}}{K_{t-1}} \Rightarrow 1 + g_K = \frac{K_t}{K_{t-1}}$$

$$g_L = \frac{L_t - L_{t-1}}{L_{t-1}} \Rightarrow 1 + g_L = \frac{L_t}{L_{t-1}}$$

$$(1 + g_x) = (1 + g_K)^{\alpha} (1 + g_L)^{1-\alpha}$$

الفصل الخامس

توازن السوق

مقدمة

في اللغة العامة يقصد بالسوق المكان الجغرافي الذي يلتقي فيه البائعون والشارون و تتبادل فيه السلع و الخدمات. إن تقدم و تطور المواصلات جعل للسوق معنى آخر. فقد أصبح من الممكن أن يتصل البائعون بالمشترين عن طريق البريد و الهاتف، و لم يعد هناك أهمية للمكان. كما أن التبادل صار يتناول سلعا مختلفة كالسندات و الأسهم و العقارات و صار من الممكن اجراء عملية تبادل آجلة بقصد المضاربة دون أن يكون في نية المشتري استلام البضاعة بل الحصول على الربح فقط. كل هذه العناصر افقدت المكان أهميته مما جعل الإقتصاديين يحددون السوق بالنظر إلى السلعة ودون اعتبار المكان. مثال: سوق البترول أو سوق الذهب إلخ... إن السوق تكون كبيرة بقدر ما يكون عدد المشاركين كبيرا و حجم التبادل ضخما.

و هكذا نفرق ما بين السوق المحلية و الوطنية و العالمية.

لقد أبرز الإقتصادي ستاكلبرغ 9 أنواع من الأسواق معطاة بالجدول التالي:

البائع / المشتري	واحد	عدد قليل	عدد كبير
واحد	احتكار ثنائي	احتكار الشراء المقيد	احتكار الشراء
عدد قليل	احتكار مقيد	احتكار قلة ثنائي	احتكار قلة جهة الشراء
عدد كبير	احتكار البيع	احتكار قلة جهة البيع	المنافسة الحرة

القسم الأول : المنافسة الحرة

في ظل المنافسة الحرة يتحدد سعر السلعة خارج نطاق المشروع عندما يتلاقى منحنى العرض العام والطلب العام.هذا السعر يفرض على المشروع. إن هدف المنتج هو تعظيم أرباحه ويتم ذلك عند تعادل السعر مع النفقة الحدية. أما في الأجل الطويل فيخفض سعر السلعة نظرا لدخول العديد من المشاريع في السوق حتى يصل إلى الحد الأدنى للنفقة المتوسطة.

تطبيق عملي : يعمل مشروع في ظل المنافسة الحرة. لدينا كل من دالة العرض العام $0 = \frac{2}{3}p$ ودالة الطلب العام $D = -3(p-11)$.

- أحسب سعر وكمية التوازن ؟

- يتحمل هذا المشروع نفقة كلية معطاة بالجدول التالي. ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟

- أرسم الخطوط البيانية، متى ينسحب المشروع من السوق ؟

الحل

1- يتحدد سعر التوازن عند تعادل العرض العام مع الطلب العام.

$$\frac{2}{3}p = -3(p-11) \Rightarrow p_e = 9 \quad q_e = 6$$

الكمية	النفقة الكلية	النفقة المتوسطة	النفقة الحدية	السعر	الإيراد الكلي	الربح
1	7	7	7	9	9	2
2	11	5,5	4	9	18	7
3	13	4,3	2	9	27	14
4	16	4	3	9	36	20
5	20	4	4	9	45	25
6	27	4,5	7	9	54	27
7	36	5,1	9	9	63	27
8	50	6,25	14	9	72	22

من الجدول يمكننا حساب كافة العناصر :

الإيراد الكلي : السعر X الكمية المنتجة

الإيراد الحدي : تزايد الإيراد الكلي كلما زاد حجم الإنتاج بوحدة واحدة.

النفقة المتوسطة = النفقة الكلية ÷ حجم الإنتاج

النفقة الحدية = تزايد النفقة الكلية كلما زاد حجم الإنتاج بوحدة واحدة.

الربح الإجمالي = الإيراد الكلي – النفقة الكلية

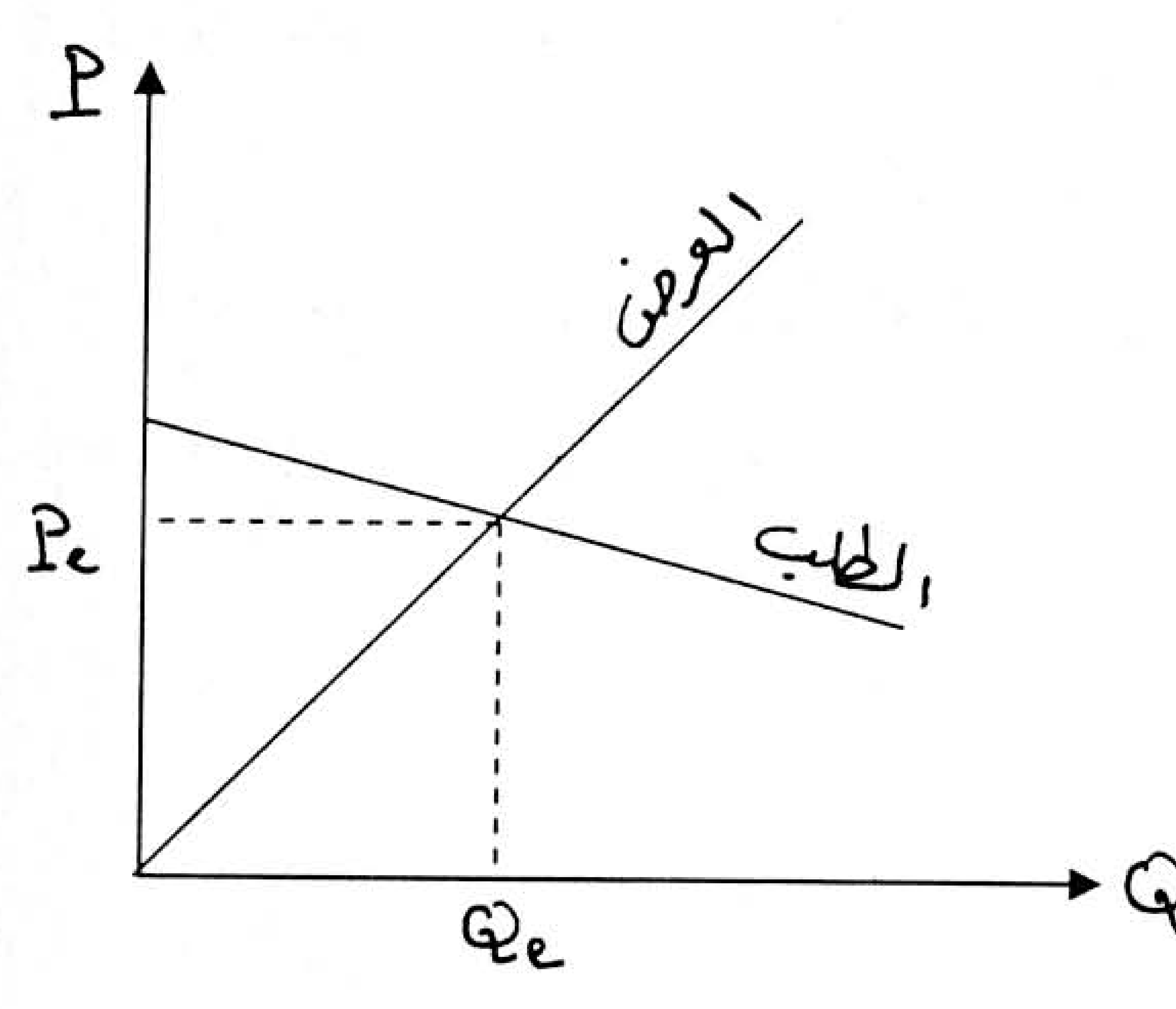
2- الخطوط البيانية :

نرسم الخطوط البيانية التالية :

منحنى النفقة المتوسطة والحدية

وكذلك دالة الطلب المتمثل في

سعر السلعة.



في الأجل القصير نلاحظ أن منحنى النفقة الحدية يقطع الطلب في النقطة I الموافق لحجم الإنتاج. إذن حجم الإنتاج الأفضل في الأجل القصير هو الكمية $Q = 7$ والذي يؤدي إلى أقصى ربح ممكن وقيمته $\pi = 27$.

أما في الأجل الطويل فنظرا لدخول منافسين جدد ينخفض السعر حتى يصل إلى الحد الأدنى للنفقة المتوسطة. في هذه الحال نلاحظ أن النفقة المتوسطة = النفقة الحدية = 4. والذي يقابلها حجم الإنتاج $Q = 5$. فالسعر لا يمكن أن ينخفض أكثر وإلا فسوف يضطر المشروع إلى الإنسحاب من السوق.

مراجعة عامة

1- يعمل مشروع في ظل المنافسة الحرة. لدينا كل من دالة الطلب العام $D = 12 - \frac{3}{5}$ والعرض العام $0 = \frac{3}{5}p$.

- أحسب سعر وكمية التوازن ؟

- لدينا دالة النفقة الكلية $CT = \frac{1}{2}q^3 - 4q^2 + 16q$

أحسب كل من النفقة المتوسطة والحدية ؟

- ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته

- متى ينسحب المشروع من السوق ؟

الحل

نحصل على سعر وكمية التوازن عندما نعادل العرض العام مع الطلب العام

$\frac{3}{5}P - 12 = \frac{3}{5}P \Leftarrow q_e = 6$ ؛ $p_e = 10$

دالة النفقة المتوسطة $CM_0 = \frac{1}{2}q^2 - 4q + 16$

دالة النفقة الحدية $CM_a = \frac{3}{2}q^2 - 8q + 16$

شرط تعظيم الربح : النفقة الحدية = السعر

$$\frac{3}{2}q^2 - 8q + 16 = 10 \Rightarrow q_e \approx 4,43$$

نحسب الإيراد الكلي : $RT = 4,43 \times 10 = 44,3$

نحسب النفقة الكلية : $CT = 6,2$

قيمة الربح الإجمالي : $\pi = RT - CT = 44,3 - 6,2 = 38,1$

تقاطع منحنى النفقة المتوسطة والحدية : يتقاطع المنحنيان عندما يمر منحنى النفقة المتوسطة بحده الأدنى أي عندما نعدم مشتق الدالة :

$.(CM_0)' = q - 4 = 0 \Rightarrow q = 4$

قيمة النفقة المتوسطة = النفقة الحدية = 8.

في هذه الحال إذا انخفض سعر سلعة ما دون هذا المستوى أي $p < 4$ فإن المشروع سوف ينسحب من السوق في الأجل الطويل.

2- يعمل مشروع في ظل المنافسة الحرة. لدينا كل من دالة العرض العام $0 = 500\sqrt{p}$ والطلب العام $D = \frac{5}{p}(10)^5$

- أحسب سعر وكمية التوازن.

- يتحمل المشروع نفقة متوسطة $CM_0 = \frac{q^2}{40} - 3q + 150$

أحسب النفقة الكلية والحدية؟ أين يتقاطع المنحنيان، منحنى النفقة المتوسطة والحدية ؟

- ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟

- متى ينسحب المشروع من السوق ؟

الحل

نحصل على سعر التوازن عندما يتعادل العرض العام مع الطلب العام $0 = D \Rightarrow$

$$\frac{5}{p}(10)^5 = 500\sqrt{p} \Rightarrow p_e = 100 \quad q_e = 5000$$

وهكذا نحصل على سعر التوازن $p_e = 100$ وكذلك كمية التوازن $q_e = 5000$.

- حساب النفقة الكلية $CT = \frac{q^3}{40} - 3q^2 + 150q$

- دالة النفقة الحدية $CM_a = \frac{3q^2}{40} - 6q + 150$

يتقاطع منحنى النفقة المتوسطة والحدية، عندما يمر منحنى النفقة المتوسطة بحده الأدنى.

نشتق دالة النفقة المتوسطة ونعدمها $(CM_0)' = \frac{q}{20} - 3 = 0 \Rightarrow q = 60$

عند هذا الحجم تتساوى النفقة المتوسطة والحدية =60.

شرط تعظيم الربح : السعر = النفقة الحدية.

$$\frac{3q^2}{40} - 6q + 150 = 100 \Rightarrow q_e = 70$$

وكذلك نحسب كافة العناصر :

النفقة المتوسطة : $CM_0 = f(70) = 62,5$

الربح الافرادي : $\pi_u = p - CM_0 = 100 - 62,5 = 37,5$

الربح الإجمالي : $\pi_G = \pi_u \times q = 37,5 \times 70 = 2625$

ينسحب المشروع من السوق عندما ينخفض السعر حتى يصل إلى ما دون الحد الأدنى للنفقة المتوسطة. هذا الحد الأدنى يساوي 60. إذن عندما $p < 60$ ينسحب المشروع من السوق.

3- يتحمل مشروع نفقة كلية : $CT = q^3 - 4q^2 + 9q$

- أحسب النفقة المتوسطة والحدية. أين يتقاطع المنحنيان ؟

- تحدد سعر السلعة $p = 12$. ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟ متى ينسحب المشروع من السوق ؟

الحل

دالة النفقة الكلية : $CT = q^3 - 4q^2 + 9q$

دالة النفقة المتوسطة : $CM_0 = q^2 - 4q + 9$

دالة النفقة الحدية : $CM_a = 3q^2 - 8q + 9$

يتقاطع منحنى النفقة المتوسطة والحدية عندما يمر منحنى النفقة المتوسطة بحده الأدنى أي عندما نعدم مشتق الدالة $(CM_0)' = 2q - 4 = 0 \Rightarrow q = 2$

قيمة النفقة المتوسطة = النفقة الحدية =5

شرط تعظيم الربح : السعر = النفقة الحدية

$$3q^2 - 8q + 9 = 12 \Rightarrow q = 3$$

نحسب الإيراد الكلي $RT = p \times q = 12 \times 3 = 36$

نحسب النفقة الكلية $CT = f(3) = 18$

دالة الربح $\pi = RT - CT = 36 - 18 = 18$

ينسحب المشروع من السوق عندما ينخفض سعر السلعة إلى ما دون الحد الأدنى للنفقة المتوسطة $p \langle 5$.

دالة الإيراد الكلي : $RT = p \times q = 12q$

دالة الربح : $\pi = RT - CT = 12q - q^3 + 4q^2 - 9q$

شرط تعظيم الربح : نعدم مشتق الدالة $\pi' = 0$

$$\pi' = 12 - 3q^2 + 8q - 9 = 0 \Rightarrow q = 3$$

في حال $p = 5$ نجد أن الربح = الصفر. حجم الإنتاج : $q = 2$

$$q - q^3 + 4q^2 - 9q = 0 \Rightarrow q = 2$$

4- مشروعان ينتجان نفس السلعة. تحدد سعر السلعة $p = 8$

نفقات إنتاج كل مشروع هي :

المشروع الأول : $CT_A = 15q - 6q^2 + q^3$

المشروع الثاني : $CT_B = 4q - 3q^2 + q^3$

- أحسب ربح كل مشروع ؟

- متى ينسحب كل مشروع من السوق ؟

الحل

الربح الإجمالي = الإيراد الكلي – النفقة الكلية

ربح المشروع الأول : $\pi_A = 8q - 15q + 6q^2 - q^3$

ربح المشروع الثاني : $\pi_B = 8q - 4q + 3q^2 - q^3$

شرط تعظيم الربح : أن نعدم المشتق فنحصل على :

$$\pi'_A = -3q^2 + 12q - 7 = 0 \Rightarrow q_A = 3{,}30$$

$$\pi'_B = -3q^2 + 6q + 4 = 0 \Rightarrow q_B = 2{,}53$$

نحصل على ربح كل مشروع بعد تعويض q بقيمتها :

$$\pi_B = 13{,}2 \qquad \pi_A = 62$$

ينسحب كل مشروع من السوق عندما ينخفض سعر السلعة إلى ما دون الحد الأدنى للنفقة المتوسطة.

نحسب النفقة المتوسطة لكل مشروع فنحصل على :

المشروع الأول : $CM_0A = 15 - 6q + q^2$

المشروع الثاني : $CM_0B = 4 - 3q + q^2$

نعدم مشتق هذه الدوال فنحصل على :

$$(CM_0A)' = 2q - 6 = 0 \Rightarrow q_A = 3$$

$$(CM_0B)' = 2q - 3 = 0 \Rightarrow q_B = \frac{3}{2}$$

$$CM_0A = CM_aA = 6$$

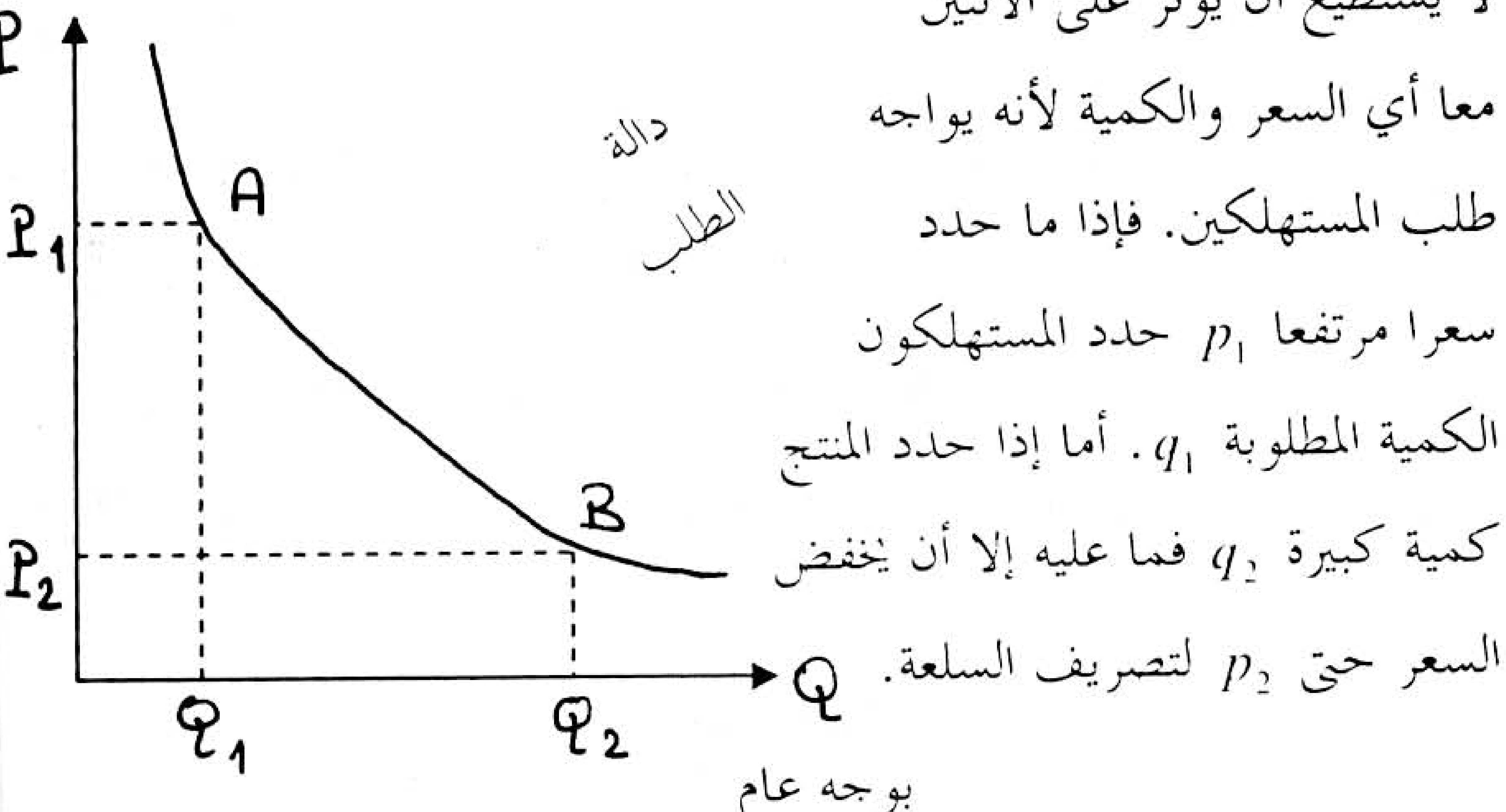
$$CM_0B = CM_aB = 7/4$$

ينسحب كل مشروع من السوق إذا انخفض السعر إلى ما دون الحد الأدنى للنفقة المتوسطة لكل مشروع.

القسم الثاني : الاحتكار

تحديده : نقول عن مشروع بأنه يحتكر انتاج سلعة إذا كان هذا المشروع يكون الصناعة بمفرده. مثال : الشركة الوطنية للتبغ والكبريت.

بإمكان المشروع أن يؤثر على سعر السلعة p أو على الكمية المنتجة q، لكنه لا يستطيع أن يؤثر على الاثنين معا أي السعر والكمية لأنه يواجه طلب المستهلكين. فإذا ما حدد سعرا مرتفعا p_1 حدد المستهلكون الكمية المطلوبة q_1. أما إذا حدد المنتج كمية كبيرة q_2 فما عليه إلا أن يخفض السعر حتى p_2 لتصريف السلعة.



بوجه عام

إذا كان الطلب غير مرن $e\langle|1|$ فمن مصلحة المنتج رفع سعر السلعة وعلى العكس إذا كان الطلب مرنا $e\rangle|1|$ فمن مصلحته تخفيض سعر السلعة. يهدف المحتكر إلى تعظيم أرباحه، الربح هو الفارق ما بين الإيراد الكلي والنفقة الكلية. شرط تعظيم الربح : الإيراد الحدي = النفقة الحدية.

تطبيق عملي

لدينا دالة النفقة المتوسطة $CM_0 = 100 + \frac{q}{2}$

لدينا دالة الطلب $p = 700 - q$

السؤال : ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟

الحل

دالة الإيراد الكلي $RT = 700q - q^2$

دالة الإيراد الحدي $RM_a = 700 - 2q$

دالة النفقة الكلية $CT = 100q + \frac{q^2}{2}$

دالة النفقة الحدية $CM_a = 100 + q^2$

شرط تعظيم الربح : الإيراد الحدي = النفقة الحدية

حجم الإنتاج : $100 + q = 700 - 2q \Rightarrow q = 200$

$p = 500$ سعر السلعة ، $\pi = R_T - C_T = 60000.$

مراجعة عامة

1- ينتج محتكر سلعة. تتكون نفقات الإنتاج من نفقة ثابتة تقدر بـــ 1000دج = CF ونفقة متغيرة معطاة بالجدول التالي :

- أحسب كل من النفقة الكلية والمتوسطة والحدية ؟
- أرسم الخطوط البيانية. أين يتقاطع منحنى النفقة الحدية والمتوسطة ؟
- يواجه هذا المحتكر طلبا معطى بنفس الجدول. أحسب الإيراد الكلي والحدي؟
- ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟

الحل

الربح	النفقة الكلية	النفقة المتوسطة	النفقة الحدية	الإيراد الحدي	الإيراد الكلي	السعر	الكمية
-360	1040	104	4	68	680	68	10
+120	1160	58	12	60	1280	64	20
+440	1316	45,3	20	52	1800	60	30
+600	1640	41	28	44	2240	56	40
+600	2000	40	36	36	2600	52	50
+440	2440	40,6	44	28	2880	48	60
+120	2960	42,3	52	20	3080	44	70
-360	3560	44,5	60	12	3200	40	80
-1000	4240	47,1	68	+4	3240	36	90
-1800	5000	50	76	-4	3200	32	100

حسب عناصر المسألة : بإمكاننا حساب كل من :

الإيراد الكلي = السعر x الكمية $RT = p \times q$

الإيراد الحدي = الزيادة في الإيراد الكلي عندما يزيد حجم الإنتاج بوحدة واحدة.

النفقة الكلية = النفقة الثابتة + النفقة المتغيرة

النفقة المتوسطة = النفقة الكلية ÷ حجم الإنتاج

النفقة الحدية = الزيادة في النفقة الكلية كلما زاد حجم الانتاج بوحدة واحدة.

الربح الإجمالي = الإيراد الكلي – النفقة الكلية

الربح الافرادي = السعر – النفقة المتوسطة

الربح الإجمالي = الربح الافرادي x الكمية المنتجة

شرط تعظيم الربح : الإيراد الحدي = النفقة الحدية

في مثالنا هذا هاتين القيمتين تتساويان عند حجم إنتاج $q = 50$ ، قيمة الربح = $\pi = 600$ ، سعر السلعة $p = 52$.

النفقة المتوسطة $CM_0 = 40$ ، الربح اللافرادي = $52 - 40 = 12 = \pi_u$.

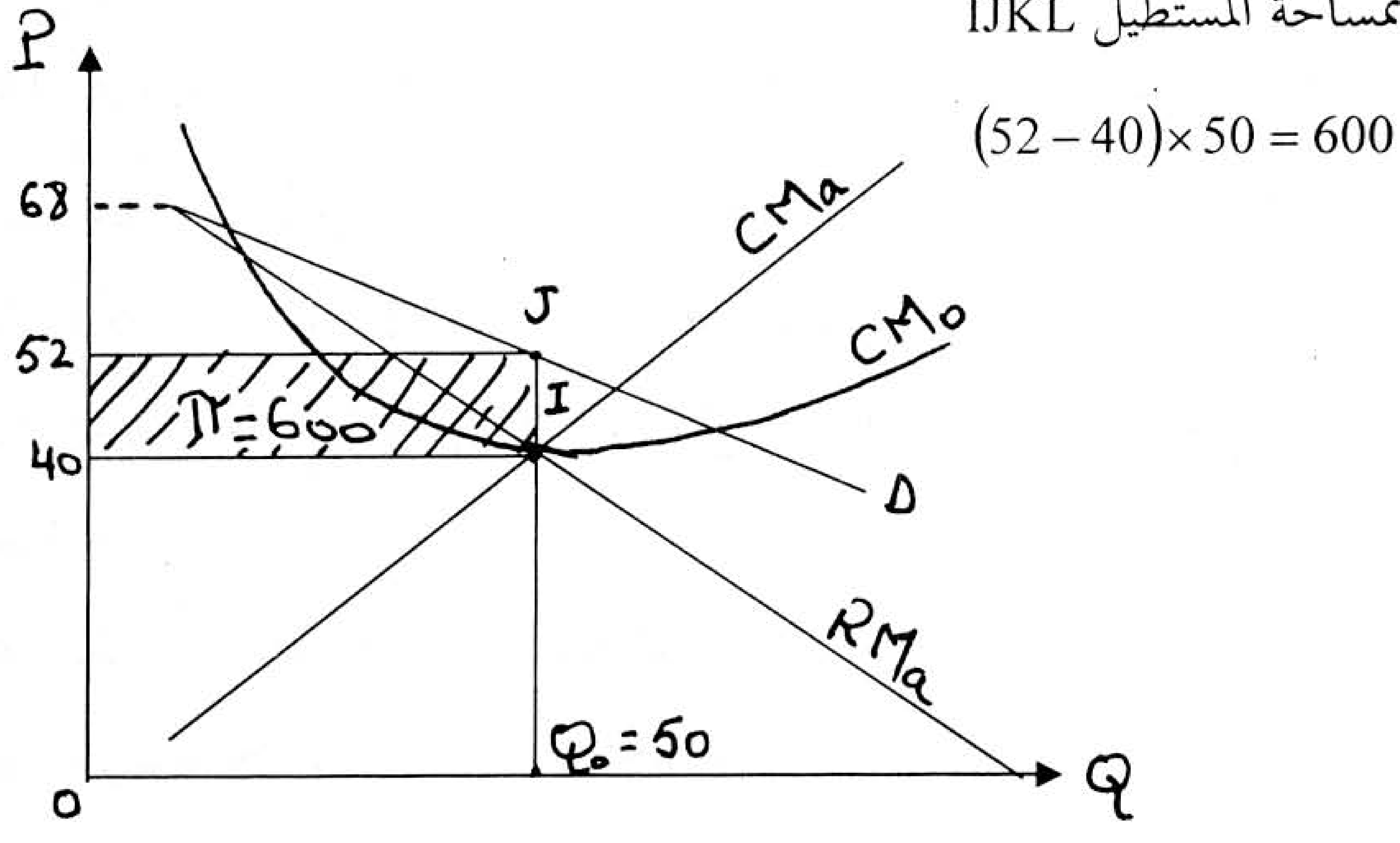
الربح الإجمالي = الربح الافرادي x الكمية المنتجة : $12 \times 50 = 600 = \pi_G$.

الخطوط البيانية

نرسم المنحنيات الأربع التالية :

دالة الطلب ودالة الإيراد الحدي، دالة النفقة المتوسطة والحدية، الربح يتمثل بمساحة المستطيل IJKL.

$$(52 - 40) \times 50 = 600$$



2- ينتج مشروع سلعة في وضع احتكاري :

دالة النفقة الكلية $CT = 6q^2 + 80q + 5000$

- أحسب النفقة المتوسطة والحدية ؟ أين يتقاطع المنحنيان ؟

لدينا دالة الطلب $p = 1080 - 4q$

- أحسب الإيراد الكلي والحدي ؟

- ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟

الحل

دالة النفقة المتوسطة $CM_0 = \dfrac{CT}{Q} = 6q + 80 + \dfrac{5000}{q}$

دالة النفقة الحدية $CM_a = (CT)' = 12q + 80$

يتقاطع هذان المنحنيان عندما تمر دالة النقطة المتوسطة بحدها الأدنى. لذلك نعدم مشتق هذه الدالة.

$$(CM_0)' = 6 - \frac{5000}{q^2} = 0 \Rightarrow q \approx 29$$

نحسب قيمة كل من النفقتين $CM_0 = CM_a = 428$

دالة الإيراد الكلي $RT = p \times q = 1080q - 4q^2$

دالة الإيراد الحدي $RM_a = 1080 - 8q$

شرط تعظيم الربح : النفقة الحدية = الإيراد الحدي

$$1080 - 8q = 12q + 80 \Rightarrow q = 50$$

هذا المقدار يمثل حجم الإنتاج الأفضل الذي يعظم الربح.

سعر السلعة $p = 1080 - 4(50) = 880$

الإيراد الكلي $RT = p \times q = 880 \times 50 = 44000$

النفقة الكلية $CT = 5000 + 80(50) + 6(50) = 24000$

الربح الإجمالي $\pi = RT - CT = 44000 - 24000 = 20000$

النفقة الحدية $CM_a = 80 + 12(50) = 680$

الإيراد الحدي $RM_a = 1080 - 8(50) = 680$

النفقة المتوسطة $CM_0 = \frac{CT}{Q} = \frac{24000}{50} = 480$

الربح الافرادي $\pi_u = p - CM_0 = 880 - 480 = 400$

الربح الإجمالي $\pi_G = \pi_u \times q = 400 \times 50 = 20000$

3- ينتج مشروع سلعة : دالة النفقة الكلية $CT = q^3 - 12q^2 + 48q$

- أحسب النفقة المتوسطة والحدية وكذلك نقطة تقاطع المنحنيين ؟

- يعمل المشروع في ظل المنافسة الحرة. تحدد السعر $p = 27$.

- ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب هذه القيمة، متى ينسحب المشروع من السوق ؟

- نفترض المشروع في وضع إحتكاري. لدينا دالة الطلب $p = 64 - q$

- ما هي شروط تعظيم الربح، أحسب قيمته ؟

- أحسب مرونة الطلب السعرية واستخرج قيمة الإيراد الحدي ؟

الحل

دالة النفقة المتوسطة $CM_0 = \frac{CT}{Q} = q^2 - 12q + 48$

دالة النفقة الحدية $CM_a = (CT)' = 3q^2 - 24q + 48$

يتقاطع منحنى النفقة الحدية مع منحنى النفقة المتوسطة عندما يمر هذا الأخير بحده الأدنى أي عندما نعدم المشتق

$$(CM_0)' = 2q - 12 = 0 \Rightarrow q = 6$$

وهكذا نحصل على قيمة كل من النفقة المتوسطة والحدية وتساوي

$$CM_0 = CM_a = 12$$

في ظل المنافسة الحرة شرط تعظيم الربح : السعر = النفقة الحدية.

$$3q^2 - 24q + 48 = 27 \Rightarrow q = 1$$

$$q = 7$$

عندما حجم الإنتاج $q = 1$ $\pi = -10$ مرفوض

عندما حجم الإنتاج $q = 7$ $\pi = 98$ مقبول

في ظل الاحتكار شرط تعظيم الربح : الإيراد الحدي = النفقة الحدية

دالة الطلب $p = 64 - q$

دالة الإيراد الكلي $RT = p \times q = 64q - q^2$

دالة الإيراد الحدي $RM_a = (RT)' = 64 - 2q$

شرط تعظيم الربح : الإيراد الحدي = النفقة الحدية

$$64 - 2q = 3q^2 - 24q + 48$$

ومنها نستخلص حجم الإنتاج : $q = 8$

سعر السلعة $p = 64 - 8 = 56$

الإيراد الكلي $RT = 56 \times 8 = 448$ النفقة الكلية $CT = 128$

الربح الإجمالي $\pi = RT - CT = 448 - 128 = 320$

4- يواجه محتكر طلبا معادلته $p = 170 - 4q$

يمتلك هذا المحتكر مصنعين. النفقة الكلية :

للمصنع الأول : $CT_1 = 100 + 10q$

وللمصنع الثاني : $CT_2 = 50 - 4q + 0{,}7q^2$

السؤال : ما هي أفضل كمية ينتجها المحتكر لتعظيم أرباحه ؟

الحل

شرط تعظيم الربح : النفقة الحدية = الإيراد الحدي

الإيراد الكلي للمشروع : $RT = p \times q = 170q - 4q^2$

الإيراد الحدي للمشروع : $RM_a = (RT)' = 170 - 8q$

النفقة الحدية للمصنع الأول : $CM_{a_1} = 10$

النفقة الحدية للمصنع الثاني : $CM_{a_2} = 1{,}4q - 4$

$$RM_a = CM_{a_1} = 170 - 8q = 10 \Rightarrow q_1 = 20$$

$$RM_a = CM_{a_2} = 170 - 8q = 1{,}4q - 4 \Rightarrow q_2 = 10$$

النفقة الكلية للمصنع الأول : $CT_1 = 100 + 20(10) = 300$

النفقة الكلية للمصنع الثاني : $CT_2 = 50 - 40 + 70 = 80$

حجم الإنتاج الكلي : $q_1 + q_2 = 10 + 20 = 30$

سعر السلعة : $p = 170 - 4(30) = 50$

الإيراد الكلي للمصنع الأول : $RT_1 = p_1 q_1 = 50 \times 20 = 1000$

الإيراد الكلي للمصنع الثاني : $RT_2 = p_2 q_2 = 50 \times 10 = 500$

الإيراد الكلي للمصنعين : $RT = RT_1 + RT_2 = 1500$

ربح المصنع الأول : $\pi_1 = RT_1 - CT_1 = 1000 - 300 = 700$

ربح المصنع الثاني : $\pi_2 = RT_2 - CT_2 = 500 - 80 = 420$

ربح المصنعين : $\pi = \pi_1 + \pi_2 = 700 + 420 = 1120$

الربح الإجمالي : $\pi = RT - CT = 1500 - 380 = 1120$

وهكذا نصل إلى نفس النتيجة

5- ينتج مشروع سلعة في وضع احتكاري. دالة النفقة المتوسطة

$$CM_0 = \frac{q^2}{600} - q + 250$$

- أحسب النفقة الحدية ؟ أين يتقاطع المنحنيان ؟

- لدينا دالة الطلب $p = 186 - \frac{9}{10}$

- أحسب كل من الإيراد الكلي والحدي ؟

- ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟

الحل

دالة النفقة الكلية $CT = CM_0 \times q = \frac{q^3}{600} - q^2 + 250q$

دالة النفقة الحدية $CM_a = \frac{q^2}{200} - 2q + 250$

يتقاطع منحنى النفقة الحدية والمتوسطة عندما يمر هذا الأخير بحده الأدنى. في هذه الحال نعدم مشتق دالة النفقة المتوسطة.

$$(CM_0)' = \frac{q}{300} - 1 = 0 \Rightarrow q = 300$$

وفي هذه الحال تتساوى قيمة كل من النفقة المتوسطة والحدية

$$CM_0 = CM_a = 100$$

دالة الإيراد الكلي $RT = 186q - \frac{q^2}{10}$

دالة الإيراد الحدي $RM_a = 186 - \frac{q}{5}$

شرط تعظيم الربح : الإيراد الحدي = النفقة الحدية

$$186 - \frac{q}{5} = \frac{q^2}{200} - 2q + 250 \Rightarrow q = 320$$

وهكذا نحصل على كافة العناصر :

سعر السلعة $p = 186 - \frac{320}{10} = 154$

الإيراد الكلي $RT = p \times q = 154 \times 320 = 49280$

النفقة الكلية $CT = f(320) = 32110$

قيمة الربح $\pi = RT - CT = 17170$

النفقة المتوسطة $CM_0 = \frac{CT}{Q} = \frac{32110}{320} \approx 100$

الربح الافرادي $\pi_u = p - CM_0 = 154 - 100 = 54$

الربح الإجمالي $\pi_G = \pi_u \times q = 54 \times 320 = 17170$

يمكن حساب قيمة الربح الإجمالي بهاتين الطريقتين.

القسم الثالث : الاحتكار المميز

تحديده : نقول عن مشروع بأنه يعمل في ظل الاحتكار المميز عندما يستطيع المنتج أن يميز في السعر، إذ يبيع نفس السلعة في سوقين مختلفين يتميزان بمرونة مختلفة. ففي السوق التي تتميز بضعف المرونة $e\langle|1|$ من مصلحة المحتكر أن يرفع من سعر السلعة. أما في السوق التي تتميز بمرونة عالية $e\rangle|1|$ فمن مصلحة المحتكر أن يخفض من سعر السلعة كي يزيد من حجم مبيعاته. مثال : السفر في الطائرة أو القطار، هناك أماكن من الدرجة الأولى والثانية.

تطبيق عملي

محتكر يبيع سلعته في سوقين مختلفين. لدينا دالة الطلب.

في السوق الأولى : $q_1 = 70 - \frac{1}{2} p_1$

في السوق الثانية : $q_2 = 105 - \frac{3}{2} p_2$

لدينا دالة النفقة الكلية : $CT = 0{,}4q^2 + 100$

- ما هي شروط تعظيم الربح في كل من السوقين. أحسب قيمة الربح ؟

الحل

سعر السلعة في السوق الأولى $p_1 = 140 - 2q_1$

سعر السلعة في السوق الثانية $p_2 = 70 - \frac{2}{3} q_2$

الإيراد الكلي في السوق الأولى $RT_1 = 140q_1 - 2q_1^2$

الإيراد الحدي في السوق الأولى $RM_{a_1} = 140 - 4q_1$

الإيراد الكلي في السوق الثانية $RT_2 = 70q_2 - \frac{2}{3}q_2^2$

الإيراد الحدي في السوق الثانية $RM_{a_2} = 70 - \frac{4}{3}q_2$

دالة الطلب العام = مجموع الطلبين = $q = q_1 + q_2$

$$\left(70 - \frac{1}{2}p_1\right) + \left(105 - \frac{3}{2}p_2\right) = 175 - 2p$$

دالة الإيراد الكلي $RT = 87{,}5q - \frac{1}{2}q^2$

دالة الإيراد الحدي $RM_a = 87{,}5 - q$

شرط تعظيم الربح : الإيراد الحدي = النفقة الحدية

$$87{,}5 - q = 0{,}8q \Rightarrow q = 48{,}6$$

دالة النفقة الحدية $CM_a = 0{,}8q$

دالة النفقة المتوسطة $CM_0 = \frac{CT}{Q} = 0{,}4 + \frac{10^3}{Q}$

قيمة النفقة الحدية $CM_a = 0{,}8(48{,}6) = 38{,}9$

شرط تعظيم الربح في كل سوق أن نقارن ما بين الإيراد الحدي والنفقة الحدية.

حجم الإنتاج في السوق الأولى $140 - 4q = 38{,}9 \Rightarrow q_1 = 25{,}3$

حجم الإنتاج في السوق الثانية $70 - \frac{4}{3}q = 38{,}9 \Rightarrow q_2 = 23{,}3$

مجموع الطلبين $q = q_1 + q_2 = 48{,}6$

سعر السلعة في السوق الأولى $p_1 = 140 - 2(25{,}3) = 89{,}4$

سعر السلعة في السوق الثانية $p_2 = 70 - \frac{2}{3}(23{,}3) = 54{,}4$

قيمة النفقة المتوسطة $CM_0 = 0{,}4(48{,}6) + \frac{10^3}{48{,}6} = 40$

دالة الربح $\pi = q(p - CM_0)$

الربح في السوق الأولى $\pi_1 = 25{,}3(89{,}4 - 40) = 1249{,}8$

الربح في السوق الثانية $\pi_2 = 23{,}3(54{,}4 - 40) = 337{,}8$

الربح العام $\pi = \pi_1 + \pi_2 = 1587{,}6$

نقارن هذا الوضع بالاحتكار العادي. حجم الإنتاج : $q = 48{,}6$

سعر السلعة $p = 87{,}5 - \frac{1}{2}(48{,}6) = 63{,}2$

الإيراد الكلي $RT = 48{,}6 \times 63{,}2 = 3071{,}5$

النفقة الكلية $CT = 40 \times 48{,}6 = 1944$

الربح الإجمالي $\pi = RT - CT = 1127{,}5$

نلاحظ أن ربح المحتكر المميز هو أكبر من ربح المحتكر العادي.

$1587{,}6 \rangle 1127{,}5$

مراجعة عامة

1- يتحمل مشروع نفقة كلية $CT = 0{,}12q^2 - 2q + 11$

يبيع المحتكر سلعته في سوقين مختلفين. دالة الطلب :

في السوق الأولى $q_1 = 20 - 0{,}2p_1$

في السوق الثانية $q_2 = 32 - 0{,}3p_2$

- ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته في كل من السوقين.

قارن ذلك مع وضع الاحتكار العادي ؟

الحل

السعر في السوق الأولى $p_1 = 100 - 5q_1$

السعر في السوق الثانية $p_2 = 106{,}6 - 3{,}3q_2$

الإيراد الكلي في السوق الأولى $RT_1 = 100q_1 - 5q_1^2$

الإيراد الكلي في السوق الثانية $RT_2 = 106{,}6q_2 - 3{,}3q_2^2$

الإيراد الحدي في السوق الأولى $RM_{a_1} = 100 - 10q_1$

الإيراد الحدي في السوق الثانية $RM_{a_2} = 106{,}6 - 6{,}6q_2$

النفقة الحدية للمشروع $CM_a = 0{,}24q - 2$

- شرط تعظيم الربح أن نعادل الإيراد الحدي مع النفقة الحدية في كل سوق.

في السوق الأولى $100 - 10q_1 = 0{,}24q - 2 \Rightarrow q_1 = 9{,}6$

في السوق الثانية $106{,}6 - 6{,}6q_2 = 0{,}24q - 2 \Rightarrow q_2 = 15{,}4$

الطلب في السوقين $q = q_1 + q_2 = 15{,}4 + 9{,}6 = 25$

سعر السلعة في السوق الأولى $p_1 = 100 - 5(9{,}6) = 52$

سعر السلعة في السوق الثانية $p_2 = 106{,}6 - 6{,}6(15{,}4) = 55{,}7$

الإيراد الكلي في السوق الأولى $RT_1 = p_1q_1 = 499{,}2$

الإيراد الكلي في السوق الثانية $RT_2 = p_2q_2 = 857{,}8$

الإيراد الكلي في السوقين $RT = 1357$

النفقة الكلية $CT = f(25) = 36$

الربح الإجمالي $\pi = RT - CT = 1321$

الطلب العام = مجموع الطلبين $q = 52 - \frac{1}{2}p$

السعر $p = 104 - 2q$

الإيراد الكلي $RT = 104q - 2q^2$

الإيراد الحدي $RM_a = 104 - 4q$

تعظيم دالة الربح يفترض أن نعادل $RM_a = CM_a \Rightarrow$

$$104 - 4q = 0{,}24q - 2 \Rightarrow q = 25$$

النفقة الحدية $CM_a = 0{,}24(25) - 2 = 4$

- تعظيم الربح في كل سوق يفترض أن نعادل النفقة الحدية مع الإيراد الحدي.

السوق الأولى $100 - 4q = 4 \Rightarrow q_1 = 9{,}6$

السوق الثانية $106{,}6 - 6{,}6q = 4 \Rightarrow q_2 = 15{,}4$

النفقة المتوسطة $CM_0 = \dfrac{CT}{Q} = 0{,}12(25) - 2 + \dfrac{11}{25} = \dfrac{36}{25}$

الربح في السوق الأولى $\pi_1 = 9{,}6\left(52 - \dfrac{36}{25}\right) = 485{,}4$

الربح في السوق الثانية $\pi_2 = 15{,}4\left(55{,}7 - \dfrac{36}{25}\right) = 835{,}6$

ربح المحتكر في السوقين $\pi = \pi_1 + \pi_2 = 1321$

نقارن هذا الوضع مع الاحتكار العادي

سعر السلعة $p = 104 - 2(25) = 54$

الإيراد الكلي $RT = 54 \times 25 = 1350$

النفقة الكلية $CT = f(25) = 36$

الربح الإجمالي $\pi = 1350 - 36 = 1314$

ومنه نستنتج بأن ربح المحتكر العادي هو دائما أقل من ربح المحتكر المميز.

1321)1314

2- يتحمل مشروع نفقة كلية $CT = q^3 - 6q^2 + 15q$

- احسب النفقة المتوسطة والحدية

- يبيع هذا المنتج سلعته في سوقين مختلفين

دالة الطلب في السوق الأولى $q_1 = -\frac{p_1}{8} + 4$

دالة الطلب في السوق الثانية $q_2 = -\frac{p_2}{10} + 2$

- احسب الايراد الكلي والحدي؟

- ما هي شروط تعظيم الربح؟ احسب قيمته؟

الحل

الطلب الاجمالي = مجموع الطلبين $q = q_1 + q_2 = -\frac{9}{40}p + 6$

ومنه نحصل على سعر السلعة $p = -\frac{40}{9}q + \frac{240}{9}$

- دالة الايراد الكلي $RT = -\frac{40}{9}q^2 + \frac{240}{9}q$

- دالة الايراد الحدي $Rma = -\frac{80}{9}q + \frac{240}{9}$

- دالة النفقة الحدية $CMa = 15 - 12q + 3q^2$

شرط تعظيم الربح: الايراد الحدي = النفقة الحدية

$$-\frac{80}{9}q + \frac{240}{9} = 15 - 12q + 3q^2 \Rightarrow q \approx 2,55$$

قيمة النفقة الحدية $CMa \approx 3,93$

يتم توزيع الكمية 2,55 ما بين السوقين. لذلك نعادل ما بين النفقة الحدية والايراد الحدي لكل سوق.

دالة الطلب في السوق الأولى $p_1 = -8q_1 + 32$

دالة الايراد الكلي $RT_1 = -8q_1^2 + 32q$

دالة الايراد الحدي $RMa_1 = -16q_1 + 32$

دالة الطلب في السوق الثانية $p_2 = -10q_2 + 20$

دالة الايراد الكلي $RT_2 = -10q_2 + 20q$

دالة الايراد الحدي $RMa_2 = -20q + 20$

شرط تعظيم الربح في كل سوق أن نعادل الايراد الحدي مع النفقة الحدية.

في السوق الأولى $-16q_1 + 32 = 3{,}93 \Rightarrow q_1 \approx 1{,}75$

في السوق الثانية $-20q_2 + 20 = 3{,}93 \Rightarrow q_2 \approx 0{,}80$

الطلب العام = مجموع الطلبين $q = q_1 + q_2 = 1{,}75 + 0{,}80 = 2{,}55$

دالة النفقة المتوسطة $CM_0 = \dfrac{CT}{Q} = 15 - 6q + q^2$

قيمة النفقة المتوسطة $CM_0 = f(2{,}55) = 6{,}2$

سعر السلعة في السوق الأولى $p_1 = -8(1{,}75) + 32 = 18$

سعر السلعة في السوق الثانية $p_2 = -10(0{,}8) + 20 = 12$

الايراد الكلي في السوق الأولى $RT_1 = 18 \times 1{,}75 = 31{,}5$

الايراد الكلي في السوق الثانية $RT_2 = 12 \times 0{,}8 = 9{,}6$

الايراد الكلي في السوقين $RT = 31{,}5 + 9{,}6 = 41{,}1$

النفقة الكلية $CT = CM_0 \times Q = 6{,}2 \times 2{,}55 = 15{,}8$

الربح الاجمالي في السوقين $\pi = 41{,}1 - 15{,}8 = 25{,}3$

الربح في السوق الأولى $\pi_1 = 1{,}75(18 - 6{,}2) = 20{,}65$

الربح في السوق الثانية $\pi_2 = 0{,}8(12 - 6{,}2) = 4{,}65$

الربح في السوقين $\pi = 20{,}65 + 4{,}65 = 25{,}30$

- في وضع الاحتكار العادي

دالة الطلب العام $q = -\frac{9}{40}p + 6$

دالة الايراد الكلي $RT = -\frac{40}{9}q^2 + \frac{240}{9}q$

دالة الايراد الحدي $RM_a = -\frac{80}{9}q + \frac{240}{9}$

دالة النفقة الحدية $CM_a = 15 - 12q + 3q^2$

حجم الانتاج الأفضل $q = q_1 + q_2 = 2{,}55$

سعر السلعة $p = -\frac{40}{9}(2{,}55) + \frac{240}{9} = 15{,}3$

الايراد الكلي $RT = 15{,}3 \times 2{,}55 = 39{,}1$

النفقة الكلية $CT = f(2{,}55) = 15{,}8$

الربح الاجمالي $\pi = 39{,}1 - 15{,}8 = 23{,}3$

نلاحظ أن ربح المحتكر العادي هو دائما أقل من ربح المحتكر المميز.

$23{,}3 < 25{,}3$

3- محتكر ببيع انتاجه في ثلاثة أسواق. لدينا دالة الطلب:

في السوق الأولى $p_1 = 63 - 4q_1$

في السوق الثانية $p_2 = 105 - 5q_2$

في السوق الثالثة $p_3 = 75 - 6q_3$

لدينا دالة النفقة الكلية $CT = 20 + 15q$

- ما هي شروط تعظيم الربح؟ احسب قيمته؟

الحل

الايراد الكلي في السوق الأولى $RT_1 = 63q - 4q^2$

الايراد الحدي في السوق الأولى $RMa_1 = 63 - 8q$

الايراد الكلي في السوق الثانية $RT_2 = 105q - 5q^2$

الايراد الحدي في السوق الثانية $RMa_2 = 105 - 10q$

الايراد الكلي في السوق الثالثة $RT_3 = 75q - 6q^2$

الايراد الحدي في السوق الثالثة $RMa_3 = 75 - 12q$

دالة النفقة الحدية $CMa = (CT)' = 15$

شرط تعظيم الربح أن نعادل النفقة الحدية مع الايراد الحدي لكل سوق.

السوق الأولى $63 - 8q = 15 \Rightarrow q_1 = 6$

السوق الثانية $105 - 10q = 15 \Rightarrow q_2 = 9$

السوق الثالثة $75 - 12q = 15 \Rightarrow q_3 = 5$

سعر السلعة في السوق الأولى $p_1 = 63 - 24 = 39$

سعر السلعة في السوق الثانية $p_2 = 105 - 45 = 60$

سعر السلعة في السوق الثالثة $p_3 = 75 - 30 = 45$

حجم الانتاج الكلي $q = 6 + 9 + 5 = 20$

قيمة النفقة المتوسطة $CM_0 = \frac{CT}{Q} = \frac{320}{20} = 16$

قيمة النفقة الكلية $CT = 20 + 15(20) = 320$

قيمة الايراد الكلي $RT = RT_1 + RT_2 + RT_3 = 999$

الربح الإجمالي $\pi = RT - CT = 679$

الربح في السوق الأولى $\pi_1 = 6(39 - 16) = 138$

الربح في السوق الثانية $\pi_2 = 9(60 - 16) = 396$

الربح في السوق الثالثة $\pi_3 = 5(45 - 16) = 145$

الربح في الأسواق الثلاثة $\pi = 138 + 396 + 145 = 679$

4- محتكر يبيع انتاجه في سوقين. دالة الطلب:

في السوق الأولى $q_1 = 16 - 0,2p$

في السوق الثانية $q_2 = 9 - 0,05p$

دالة النفقة الكلية $CT = 20q + 20$

- ما هي شروط تعظيم الربح؟ احسب قيمته؟

الحل

دالة الطلب في السوق الأولى $p = 80 - 5q$

دالة الايراد الكلي $RT_1 = 80q - 5q^2$

دالة الايراد الحدي $RMa_1 = 80 - 10q$

دالة الطلب في السوق الثانية $p = 180 - 20q$

دالة الايراد الكلي $RT_2 = 180q - 20q^2$

دالة الايراد الحدي $RMa_2 = 180 - 40q$

دالة النفقة الحدية $CMa = 20$

شرط تعظيم الربح في السوق الأولى $80 - 10q = 20 \Rightarrow q_1 = 6$

شرط تعظيم الربح في السوق الثانية $180 - 40q = 20 \Rightarrow q_2 = 4$

سعر السلعة في السوق الأولى $p_1 = 80 - 30 = 50$

سعر السلعة في السوق الثانية $p_2 = 180 - 80 = 100$

قيمة النفقة الكلية $CT = 20(10) + 20 = 220$

قيمة الايراد الكلي $RT = 300 + 400 = 700$

الربح في السوقين $\pi = 700 - 220 = 480$

في وضع الاحتكار العادي: الطلب العام = مجموع الطلبين

$q = q_1 + q_2 \Rightarrow q = 25 - 0,25p$

دالة الايراد الكلي $RT = 100q - 4q^2$

دالة الايراد الحدي $RMa = 100 - 8q$

شرط تعظيم الربح: الايراد الحدي = النفقة الحدية $\Leftarrow q = 10$

سعر السلعة $p = 60 = 100 - 4(10)$

الايراد الكلي $RT = 60 \times 10 = 600$

النفقة الكلية $CT = 220$

الربح $\pi = 600 - 220 = 380$

نلاحظ أن ربح المحتكر العادي هو أقل من ربح المحتكر المميز.

$$480 \rangle 380$$

القسم الرابع:

المنافسة الاحتكارية

تحديدها: نقول عن مشروع بأنه يعمل في ظل المنافسة الاحتكارية إذا كان عدد البائعين كبيرا. من هذه الناحية هو في وضع تنافسي مع البائعين الآخرين. من جهة أخرى يبيع سلعة تختلف عن السلع الأخرى أي أن السلع ليست متجانسة. في هذه الحال هو في وضع احتكاري. يريد المشروع أن يعظم أرباحه. بوجه عام يكون المشروع في الأجل القصير في وضع احتكاري وفي الآجل الطويل يكون في وضع تنافسي.

تمرين رقم 1 :

يعمل مشروع في ظل المنافسة الاحتكارية. النفقة المتوسطة معطاة بالجدول التالي. لدينا دالة الطلب العام: $p = -40q + 90$

السؤال: ما هي شروط التوازن في كل من الآجل الطويل والقصير؟

الحل

في الأجل القصير: يتصرف المشرع كما لو كان في وضع احتكاري. شرط تعظيم الربح أن نعادل النفقة الحدية مع الإيراد الحدي. في مثلنا هذا $CMa = RMa = 34$ ويتم ذلك عند مستوى إنتاج Q=7.

نحسب كافة عناصر المسألة: السعر=26= p ، الإيراد الكلي RT =62x7=344.

النفقة الكلية = 166. الربح الإجمالي: $\pi = RT - CT = 434 - 166 = 268$.

في الأجل الطويل: لا شك أن الربح الوفير يجذب إلى الصناعة مشاريع عديدة بزيد العرض. فإذا بقي الطلب على حاله سوف ينخفض السعر ويصبح المشروع في وضع تنافسي مع المشاريع الأخرى وسوف يظل السعر في الانخفاض حتى يصل إلى الحد الأدنى للنفقة المتوسطة.

في مثلنا هذا الحد الأدنى= $CM_{0_{Min}}$ =22 ويقابل ذلك حجم إنتاج Q=6 بحيث أن منحنى النفقة المتوسطة والحدية يتقاطعان في هذه النقطة. أما بالنسبة لدالة الطلب فتنخفض وتبقى موازية لحالها. إن دالة الطلب هي من الشكل

$p = -4q + b$

في حالة التوازن يتعادل السعر مع الحد الأدنى للنفقة المتوسطة وتساوي 22 وذلك عند حجم إنتاج q=5. بهذه الطريقة نستطيع أن نحدد قيمة الثابت b وتساوي $p = 22 = -4(5) + b = 42$

إذن دالة الطلب الجديدة هي من الشكل $p = -4q + 42$

وهكذا نحصل على كافة العناصر.

دالة الايراد الكلي: $RT = -4q^2 + 42q$

دالة الايراد الحدي: $RMa = -8q + 42$

بما أن حجم الانتاج الأفضل هو q=5 نعوض ذلك في كل من دالة النفقة الحدية فنحصل على 2 وفي دالة الايراد الحدي فنحصل على $RMa = 42 - 40 = 2$

دالة الايراد الكلي: $RT = p \times q = 5 \times 22 = 110$

دالة النفقة الكلية: $CT = f(5) = 110$

الربح الإجمالي: $\pi = RT - CT = 0$

نلاحظ أن المشروع يغطي كافة نفقاته.

الخطوط البيانية

نرسم الدوال الأربعة التالية: دالة الطلب، دالة الإيراد الحدي، دالة النفقة الحدية ودالة النفقة المتوسطة.

نرسم كذلك دالة الطلب والايراد الحدي في كل من الأجل القصير والطويل.

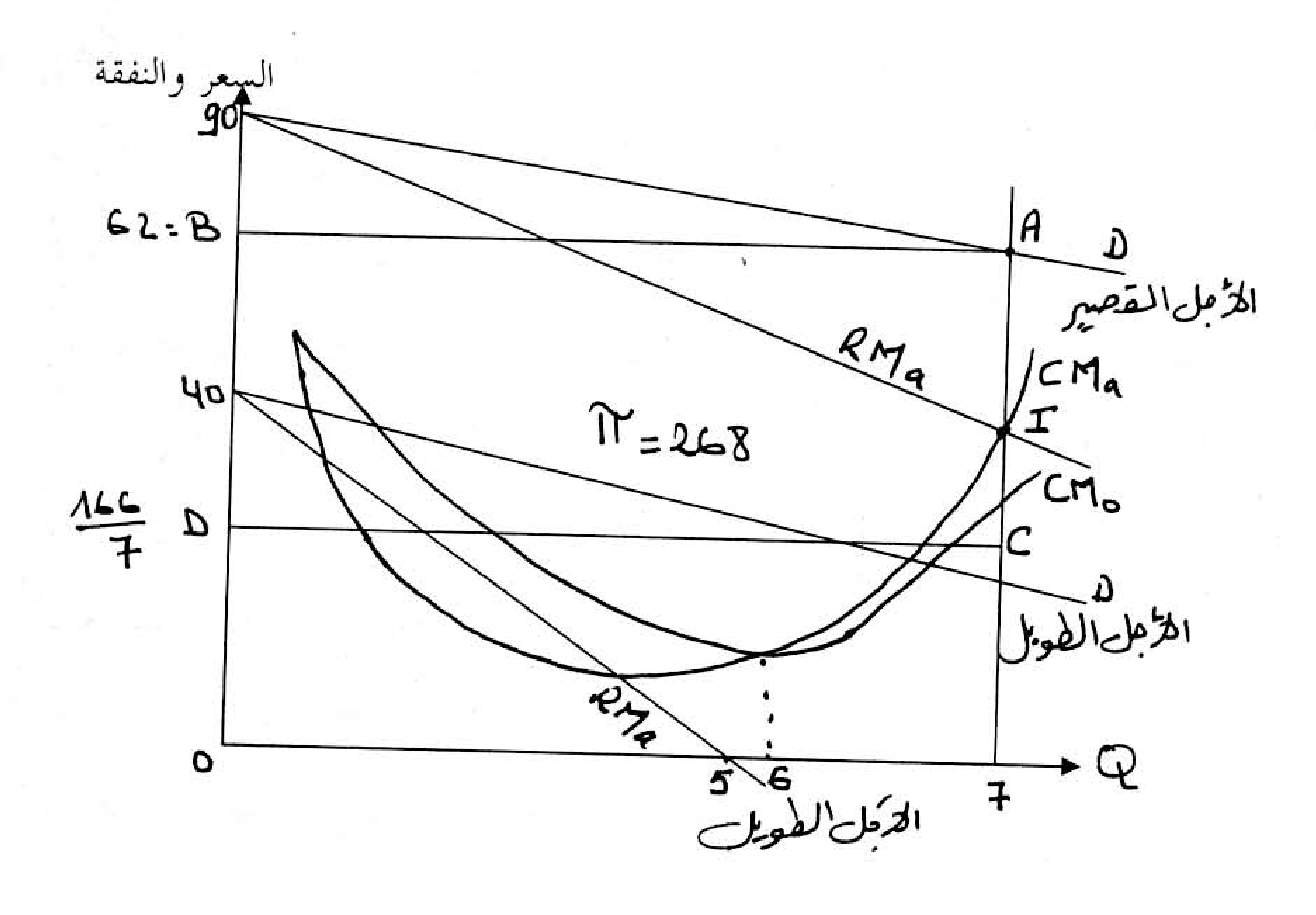
في الأجل القصير: ربح المحتكر = مساحة المستطيل: ABCD

يمثل حجم الآنتاج $AB : Q = 7$

يمثل السعر – النفقة المتوسطة: CD

الربح = $\pi = 7\left(62 - \frac{166}{7}\right) = 268$

أما في الأجل الطويل فينخفض حجم الإنتاج ويساوي Q=6 ويقابل ذلك الحد الأدنى للنفقة المتوسطة والذي يساوي النفقة الحدية وتساوي $CM_0 = CMa = 22$.



الربح	الايراد الحدي	الايراد الكلي	السعر	النفقة الحدية	النفقة الكلية	النفقة المتوسطة	الكمية
26	82	86	86	60	60	60	1
84	74	164	82	20	80	40	2
138	66	234	78	16	96	32	3
188	58	296	74	12	108	27	4
240	50	350	70	2	110	22	5
264	42	396	66	22	132	22	6
168	34	434	62	34	166	166/7	7
233	26	464	58	65	231	28.875	8

تمرين رقم 2: عشرة مشاريع تنتج نفس السلعة. نفقة الانتاج المتوسطة معطاة بالجدول التالي:

- ارسم منحنى النفقة المتوسطة والحدية؟ أين يتقاطع المنحنيان؟
- لدينا دالة الطلب، احسب الايراد الكلي والحدي. ارسم الخطوط البيانية.
- احسب حجم الانتاج الأفضل الذي يعظم الربح في الأجل القصير والطويل؟

الحل

في الأجل القصير: يقطع منحنى الكلفة الحدية منحنى الايراد الحدي في النقطة I وبذلك نحصل على حجم الإنتاج الفضل Q=9.

أما السعر المقابل له $p = 2500$. كذلك الكلفة المتوسطة $CM_0 = 1300$.

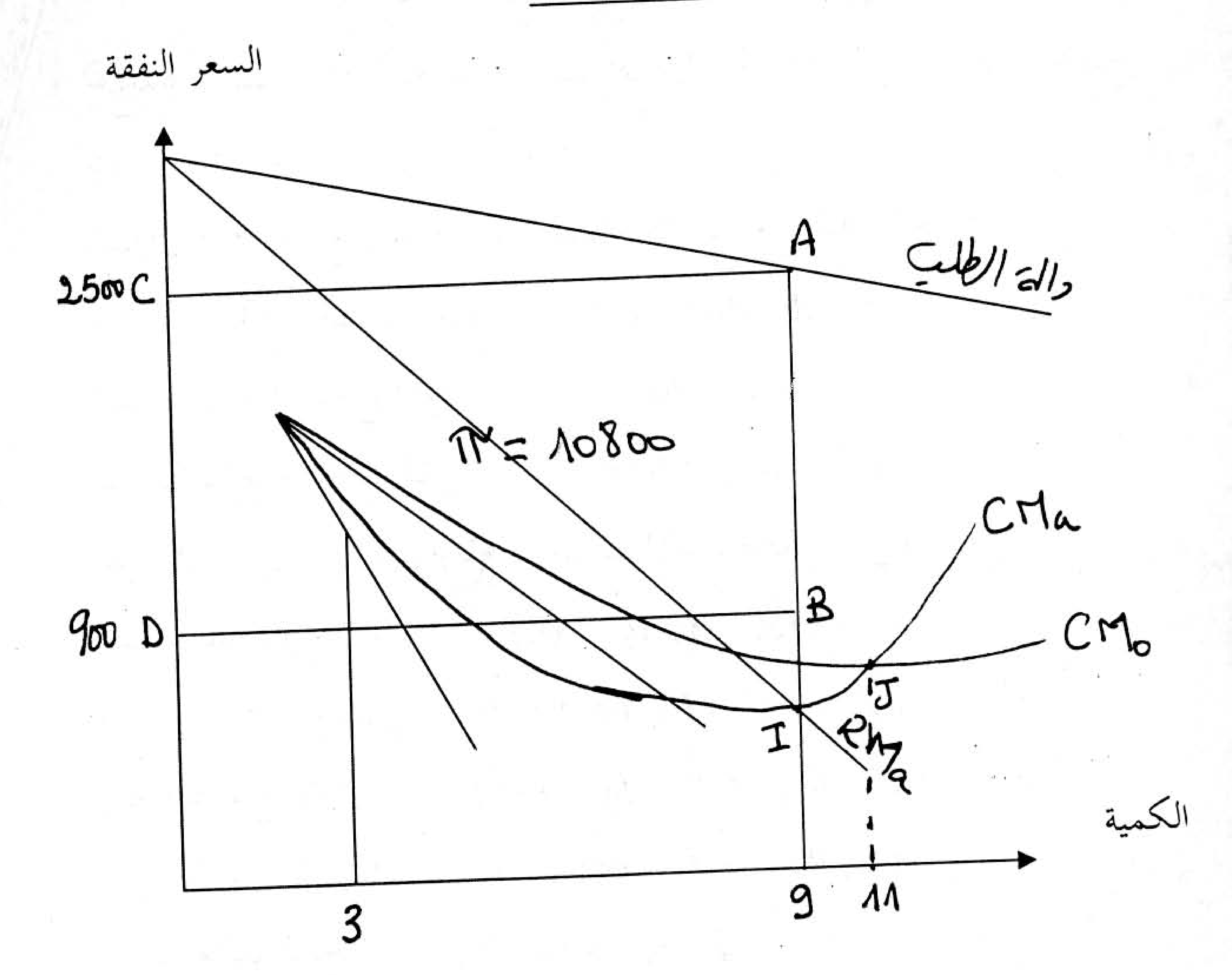
أخيرا الربح الإفرادي = السعر – النفقة المتوسطة = 1200.

الربح الإجمالي = الربح الافرادي x الكمية = 9 x 1200=10800.

<u>في الأجل الطويل:</u> تلعب المنافسة دورها، عندئذ ينخفض السعر وكذلك منحنى الايراد الحدي. يمس منحنى الطلب منحنى الكلفة المتوسطة عندئذ نحصل على سعر التوازن ويساوي 1950. يقطع منحنى الايراد الحدي منحنى الكلفة الحدية فنحصل على الكمية المنتجة: Q=3. أما الكمية المطلوبة التي تقابل السعر 1950 فهي Q=12 بما أنه يوجد 10 مشاريع فالطلب العام 12 x 10= 120. في الأجل الطويل كل مشروع ينتج 3 وحدات إذن هناك $\frac{120}{3}=40$ مشروع.

الربح	الايراد الحدي	الايراد الكلي	السعر	النفقة الحدية	النفقة الكلية	النفقة المتوسطة	حجم الإنتاج
	4100	4100	2400	2400	2400	2400	1
	3700	7800	3900	1950	4350	2175	2
	3300	11100	3700	1575	5925	1975	3
	2900	14000	3500	1275	7200	1800	4
	2500	16500	3300	1050	8250	1650	5
	2100	18600	1300	900	9150	1525	6
	1700	20300	2900	825	9975	1425	7
	1300	21600	2700	825	10800	1350	8
10800	900	82500	2500	900	11700	1300	9
	500	23000	2300	1050	12750	1275	10
	100	23100	2100	1275	14025	1275	11
	-300	22800	1900	1575	15600	1300	12
	-700	23000	1700	1975	17500	1350	13
	-1100	21000	1500	2400	19950	1425	14
	-1500	19500	1300	2925	22075	1525	15

الخطوط البيانية



القســـم الخـــامس : الاحتكار الثنائي

تحديده : نقول أننا أمام سوق يسودها الاحتكار الثنائي إذا كان الانتاج يتقاسمه مشروعان.

السؤال الذي يطرح : ما هي استراتيجية كل مشروع تجاه الآخر ؟

مثال : لدينا دالة الطلب العام $p = A - B(\varphi_1 + \varphi_2)$

نفقات إنتاج المشروع الأول $CT_1 = a_1\varphi_1 + b_1\varphi_1$

نفقات إنتاج المشروع الثاني $CT_2 = a_2\varphi_2 + b_2\varphi_2$

كل مشروع يريد تعظيم ارباحه. نحسب الايراد الكلي لكل مشروع :

بالنسبة للمشروع الأول : $RT_1 = A\varphi_1 - B\varphi_1(\varphi_1 + \varphi_2)$

بالنسبة للمشروع الثاني : $RT_2 = A\varphi_2 - B\varphi_2(\varphi_1 + \varphi_2)$

ربح المشروع الأول : $\pi_1 = RT_1 - CT_1 = f(\varphi_1 + \varphi_2)$

ربح المشروع الثاني : $\pi_2 = RT_2 - CT_2 = \varphi(\varphi_1 + \varphi_2)$

شرط تعظيم الربح أن نعدم المشتقات الجزئية الأولى :

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial \varphi_1} = A - B(2\varphi_1 + \varphi_2) - a_1 - 2b_1\varphi_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial \varphi_2} = A - B(\varphi_1 + 2\varphi_2) - a_1 - 2b_2\varphi_2 = 0$$

وهكذا نحصل على خط رد الفعل لكل مشروع.

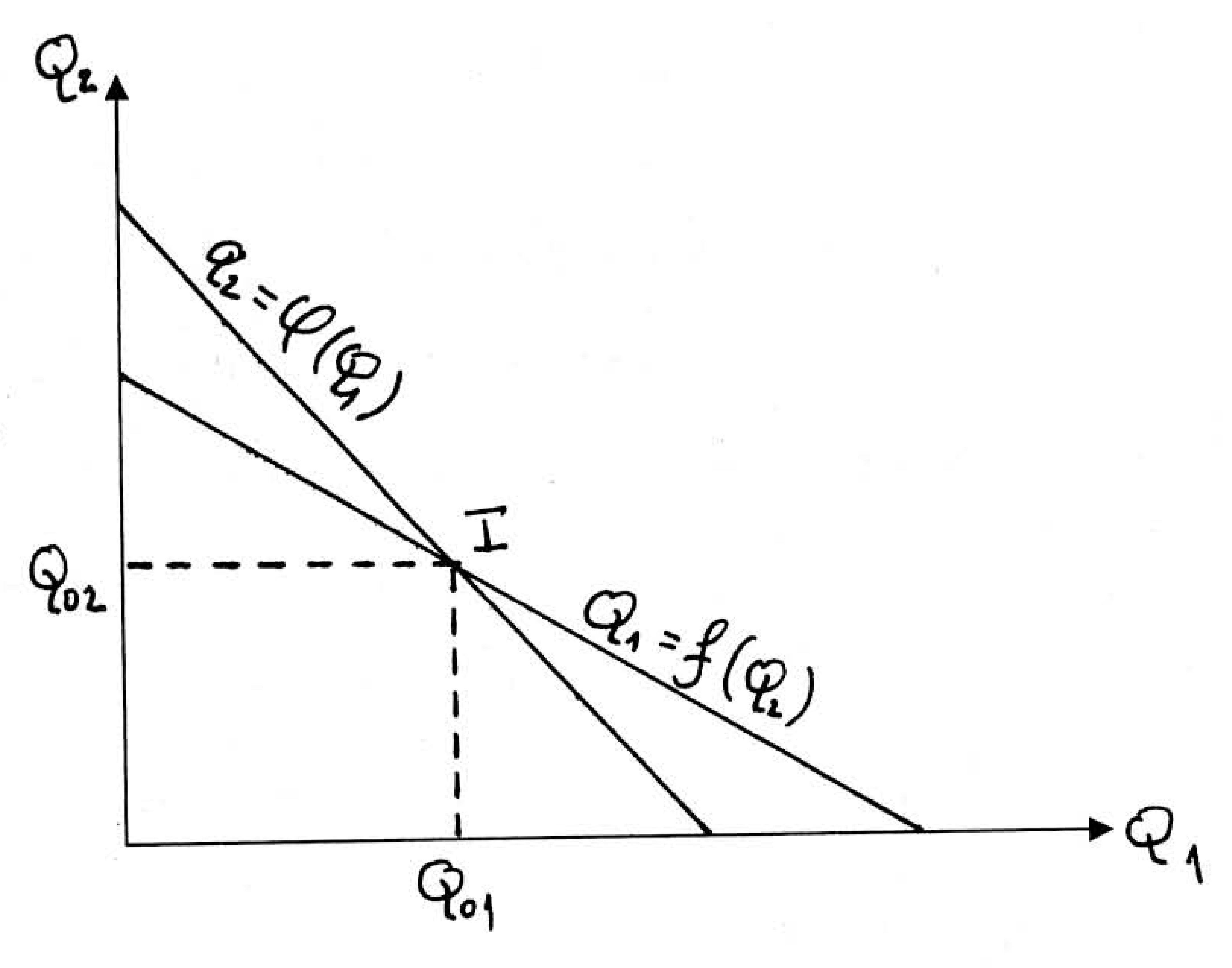
$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{A - a_1}{2(B + b_1)} - \dfrac{B}{2(B + b_1)}\varphi_2 \\ \varphi_2 = \dfrac{A - a_2}{2(B + b_2)} - \dfrac{B}{2(B + b_2)}\varphi_1 \end{cases}$$

الخطوط البيانية

نرسم المستقيمين السابقين، يتقاطعان في I إحداثياهما :

$$\varphi_1 = \frac{2(B+B_2)(A-a_1)-B(A-a_2)}{4(B+B_1)(B+B_2)-B^2}$$

$$\varphi_2 = \frac{2(B+B_1)(A-a_2)-B(A-a_1)}{4(B+B_1)(B+B_2)-B^2}$$



تمارين تطبيقية

تمرين رقم 1 : مشروعان يتقاسمان السوق، دالة الطلب $x = -\frac{1}{3}p + 33$

النفقة المتوسطة للمشروع الأول : $CMo_1 = 51$

النفقة المتوسطة للمشروع الثاني : $CMo_2 = 33$

السؤال : ما هو ربح كل مشروع ؟

الحـــل

ربح المشروع الأول : $\pi_1 = (99 - 3x_1)x_1 - 51x_1$

ربح المشروع الثاني : $\pi_2 = (99 - 3x_2)x_2 - 33x_2$

شرط تعظيم الربح : أن نعدم مشتق الدالة

$$\pi_1' = 99 - 6x_1 - 51 = 0 \Rightarrow x_1 = 8$$

$$\pi_2' = 66 - 6x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 11$$

سعر السلعة : $p = -57 + 99 = 42$

ربح المشروع الأول : $\pi_1 = 8 \times 42 - 8 \times 51 = -72$

ربح المشروع الثاني : $\pi_2 = 11 \times 42 - 11 \times 33 = +99$

نلاحظ أن أحد المشروعين خاسر. من مصلحة المشروعين أن يتفقا فيما بينهما لتعظيم الربح الاجمالي.

ربح المشروع الأول : $\pi_1 = [-3(x_1 + x_2) + 99]x_1 - 51x_1$

ربح المشروع الثاني : $\pi_2 = [-3(x_1 + x_2) + 99]x_2 - 33x_2$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

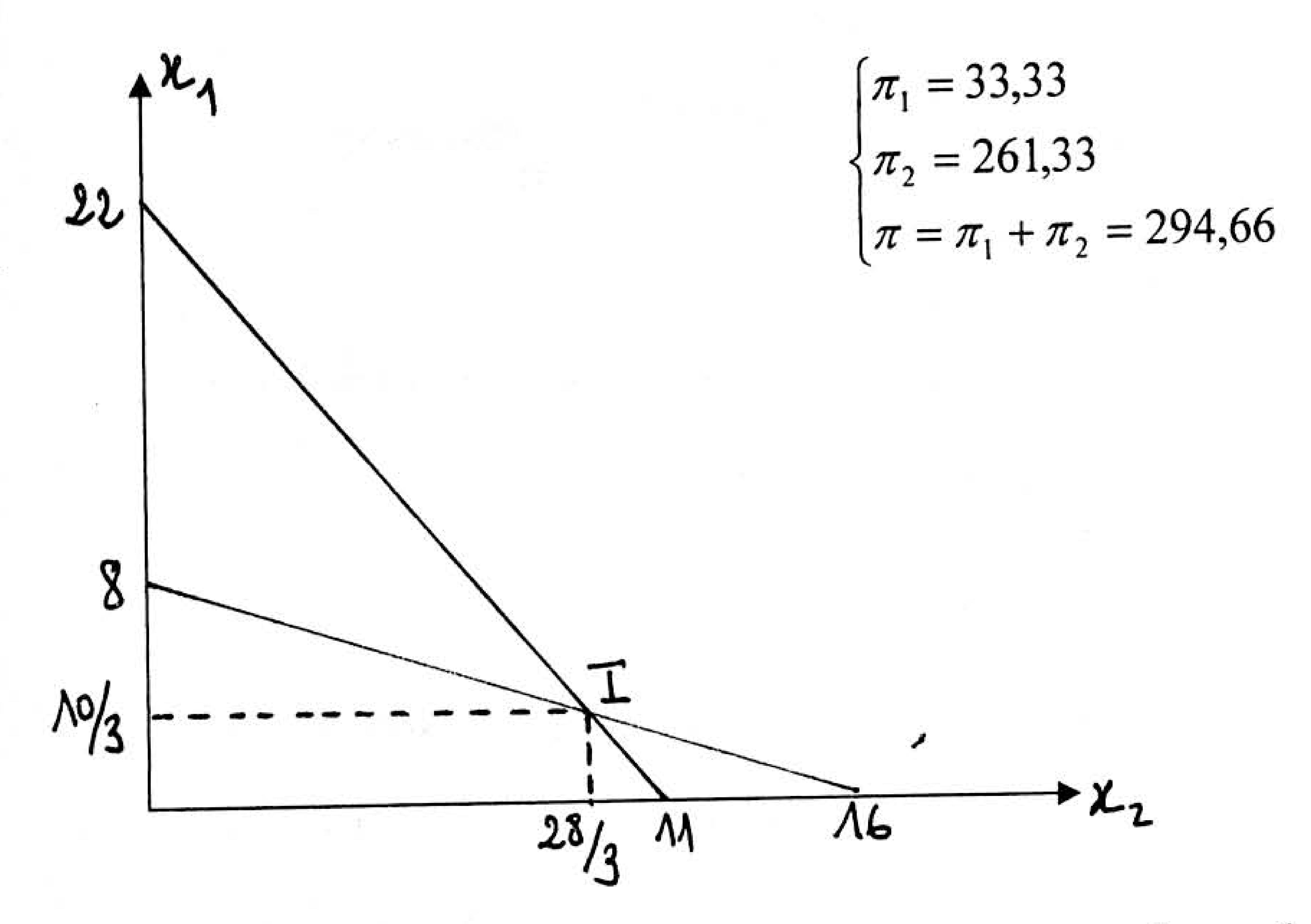
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = -6x_1 - 3x_2 + 48 = 0 \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = -3x_1 - 6x_2 + 66 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{10}{3} \\ x_2 = \dfrac{28}{3} \end{array}\right.$$

خط رد الفعل للمشروع الأول : $x_1 = 8 - \dfrac{x_2}{2}$

خط رد الفعل للمشروع الثاني : $x_2 = 11 - \dfrac{x_1}{2}$

بعد التعويض نحصل على ربح كل مشروع.

$$\begin{cases} \pi_1 = 33{,}33 \\ \pi_2 = 261{,}33 \\ \pi = \pi_1 + \pi_2 = 294{,}66 \end{cases}$$



تمرين رقم 2 : مشروعان يتقاسمان السوق. لدينا دالة النفقة الكلية للمشروع الأول : $CT_1 = 5\varphi_1$

دالة النفقة الكلية للمشروع الثاني : $CT_2 = \frac{1}{2}\varphi_2^2$

لدينا دالة الطلب العام : $p = 100 - \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_1)$

السؤال : أحسب ربح المشروعين في الحالات الثلاث ؟

الحـــــل

الحالة الأولى : حسب مفهوم كورنو

ربح المشروع الأول : $\pi_1 = 100\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_1(\varphi_1 + \varphi_2) - 5\varphi_1$

ربح المشروع الثاني : $\pi_2 = 100\varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_2(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{1}{2}\varphi_2^2$

شرط تعظيم الربح أن نعدم المشتقات الجزئية الأولى.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \pi_1}{\partial \varphi_1} &= 100 - \varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_2 - 5 = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial \varphi_2} &= 100 - \varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_1 - \varphi_2 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

وبذلك نحصل على خط رد الفعل لكل مشروع.

$$\varphi_1 = 95 - \frac{1}{2}\varphi_2$$

$$\varphi_2 = 50 - \frac{1}{4}\varphi_1$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على كافة العناصر.

سعر السلعة : $p = 45$

ربح المشروع الأول : $\pi_1 = 3200$

ربح المشروع الثاني : $\pi_2 = 900$

$$\begin{cases}\varphi_1 = 80 \\ \varphi_2 = 30 \\ \varphi_1 = 110\end{cases}$$

<u>الحالة الثانية</u> : حسب مفهوم ستاكلبرغ.

A : نفترض المشروع الأول المسيطر

بأخذ بعين الاعتبار استراتيجية المشروع الثاني

دالة رد فعل المشروع الثاني $\varphi_2 = 50 - \frac{1}{4}\varphi_1$

نعوض ذلك في دالة الربح للمشروع الأول فنحصل على :

$$\pi_1 = 100\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_1^2 - -\varphi_1(50 - \frac{1}{4}\varphi_1) - 5\varphi_1$$

تعظيم دالة الربح يفترض أن نعدم مشتق الدالة فنحصل على :

$$\frac{d\pi_1}{d\varphi_1} = 70 - \frac{3}{4}\varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 93{,}33; \varphi_2 = 26{,}66$$

B : نفترض المشروع الثاني المسيطر
$$\begin{cases}\pi_1 = 3266,66 \\ \pi_2 = 155,55\end{cases}$$

بأخذ بعين الاعتبار استراتيجية المشروع الأول.

دالة رد الفعل للمشروع الأول : $\varphi_1 = 95 - \frac{1}{2}\varphi_2$

نعوض ذلك في دالة ربح المشروع الثاني فنحصل على :

$$\pi_2 = 100\varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_2^2 - \frac{1}{2}\varphi_2(95 - \frac{1}{2}\varphi_2)$$

تعظيم هذه الدالة يفترض أن نعدم المشتق فنحصل على :

$$\frac{d\pi_2}{d\varphi_2} = 52,5 - \frac{3}{2}\varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = 35; \varphi_1 = 77,5$$

وبذلك نحصل على ربح المشروع الأول $\pi_1 = 918,75$

والثاني $\pi_2 = 3003,125$

الحالة الثالثة : حسب مفهوم بولي :

يعتقد كل مشروع بأنه المسيطر فنجد أن $\varphi_1 = 93,33$ $\varphi_2 = 35$

$$\pi_1 = 95\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_1^2(\varphi_1 + \varphi_1)$$

$$\pi_2 = 100\varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2 - \varphi_2^2)$$

نعوض φ_1 و φ_2 بقيمهما فنحصل على قيمة الربح لكل مشروع.

$\pi_1 = 2990$ $\pi_2 = 642$ $\pi = 3632$

لو اتفق المشروعان على تعظيم الربح الاجمالي لحصلنا على :

$$\pi = 100(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - 5\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_2^2$$

تعظيم هذه الدالة يفترض أن نعدم المشتقات الجزئية الأولى :

$$\frac{\partial \pi}{\partial \varphi_1} = 95 - \varphi_1 - \varphi_2 = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial \varphi_2} = 100 - \varphi_1 - 2\varphi_2 = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 = 95 \\ \varphi_1 + 2\varphi_2 = 100 \end{cases} \Rightarrow$$

نلاحظ أن الربح الاجمالي ارتفع :

سعر السلعة $p = 52,5$

الربح الاجمالي $\pi = 4525$

$$\begin{cases} \varphi_1 = 90 \\ \varphi_2 = 5 \\ \varphi = 95 \end{cases}$$

تمرين رقم 3 : مشروعان يتقاسمان السوق. تكاليف إنتاج كل مشروع هي كالتالي :

المشروع الأول : $CT_A = 500 + 2x$

المشروع الثاني : $CT_B = 600 + \frac{3}{2}y$

لدينا دالة الطلب العام : $D = x + y = 1000 - 100p$

السؤال : ما هي شروط تعظيم الربح لكل مشروع ؟ أحسب قيمته ؟

الحـــل

نحسب الايراد الكلي لكل مشروع فنحصل على :

بالنسبة للمشروع الأول : $RT_A = 10x - \frac{x}{100}(x + y)$

بالنسبة للمشروع الثاني : $RT_B = 10y - \frac{y}{100}(x + y)$

ربح المشروع الأول : $\pi_A = 8x - 500 - \frac{x}{100}(x + y)$

ربح المشروع الثاني : $\pi_B = 8,5y - 600 - \frac{y}{100}(x + y)$

الحالة الأولى : حسب مفهوم كورنو.

يعظم كل مشروع ربحه دون أن يأخذ بعين الاعتبار المشروع الآخر.

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial x} = 8 - \frac{2x}{100} - \frac{y}{100} = 0$$
$$\frac{\partial \pi_B}{\partial y} = 8,5 - \frac{2y}{100} - \frac{x}{100} = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 800 \\ x + 2y = 800 \end{cases} \Rightarrow$$

بحل هاتين المعادلتين لمجهولين نحصل على :

$$\begin{cases} x = 250 \\ y = 300 \\ D = 550 \end{cases}$$

سعر السلعة : $\begin{cases} p = 4,5 \end{cases}$

ربح المشروع الأول : $\pi_A = 125$

ربح المشروع الثاني : $\pi_B = 300$

الحالة الثانية : حسب مفهوم ستاكلبرغ.

A : نفترض أن المشروع الأول هو المسيطر. بأخذ بعين الاعتبار استراتيجية المشروع الثاني $x + 2y = 850 \Rightarrow y = 425 - \frac{x}{2}$

نعوض ذلك في دالة الربح فنحصل على : $\pi = \frac{x^2}{200} + 3;75 \times -500$

شرط تعظيم الربح أن نعدم المشتق : $\pi' = -\frac{x}{100} + 3,75 = 0$

$$\begin{cases} x = 375 \\ y = 237,5 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \pi_A = 203,1 \\ \pi_B = -35,9 \end{matrix}$$

B : نفترض أن المشروع الثاني هو المسيطر. بأخذ بعين الاعتبار استراتيجية المشروع الأول. $2x + y = 800 \Rightarrow x = 400 - \frac{y}{2}$

نعوض ذلك بدالة ربح المشروع الثاني فنحصل على :

$$\pi = -\frac{y^2}{200} + 4{,}5y - 600 = 0$$

شرط تعظيم الربح أن نعدم مشتق الدالة

$$\pi' = -\frac{y}{100} + 4{,}5 = 0 \Rightarrow y = 450, x = 175 \Rightarrow$$

نلاحظ في هذه الحال أن ربح المشروع الثاني زاد على عكس ربح المشروع الأول. $\pi_B = 412{,}50$ $\pi_A = -193{,}75$

الحالة الثالثة : حسب مفهوم بولي.

يعتقد المشروعان بانهما مسيطران عندئذ نجد حجم انتاج المشروع الأول $= 375 = x$. وحجم المشروع الثاني $= 450 = y$.

نعوض ذلك في دالة الربح لكل مشروع ونصل إلى النتائج التالية :

ربح المشروع الأول = $-593{,}75 = \pi_A$ أي أن المشروع الأول خاسر

ربح المشروع الثاني = $487{,}50 = \pi_B$ أي أن المشروع الثاني ايضا خاسر

من مصلحة المشروعين أن يتفقا فيما بينهما لتعظيم دالة الربح الاجمالي.

تمرين رقم 4 : في سوق يسوده مشروعان. دالة الطلب العام

$$D = 100 - p$$

النفقة الكلية للمشروع الأول : $CT_1 = 20 + 2\varphi_1^2$

النفقة الكلية للمشروع الثاني : $CT_2 = 10 + 3\varphi_2^2$

السؤال : ما هي شروط تعظيم الربح لكل مشروع ؟ أحسب قيمته ؟

الحـــــل

شرط تعظيم الربح : السعر = النفقة الحدية $p = CMa$

دالة النفقة الحدية للمشروع الأول : $CMa_1 = 4\varphi_1$

دالة النفقة الحدية للمشروع الثاني : $CMa_2 = 6\varphi_2$

سعر السلعة : $p = 100 - (\varphi_1 + \varphi_2)$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين

بحلها نحصل على العناصر التالية : $\begin{cases} 4\varphi_1 = 100 - (\varphi_1 + \varphi_2) \\ 6\varphi_2 = 100 - (\varphi_1 + \varphi_2) \end{cases}$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 = 17{,}64 \\ \varphi_2 = 11{,}76 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 29{,}4 \\ p = 70{,}6 \end{cases}$$

ربح المشروع الأول : $\pi_1 = 603$

ربح المشروع الثاني : $\pi_2 = 405$

$\pi = 1008$

حسب مفهوم كورنو نحسب ربح كل مشروع ونعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial \varphi_1} = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{100 - \varphi_2}{6} \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial \varphi_2} = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{100 - \varphi_1}{8} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 25{,}5 \\ p = 74{,}5 \end{cases}$$

نحصل على كميات توازن عندما يتقاطع المستقيمان

في النقطة I إحداثياتها هي : $I \begin{cases} \varphi_1 = 14{,}9 \\ \varphi_2 = 10{,}6 \end{cases}$

ربح المشروع الأول : 653

ربح المشروع الثاني : 433

أما إذا اتفق المشروعان على تعظيم الربح الاجمالي فنحصل على :

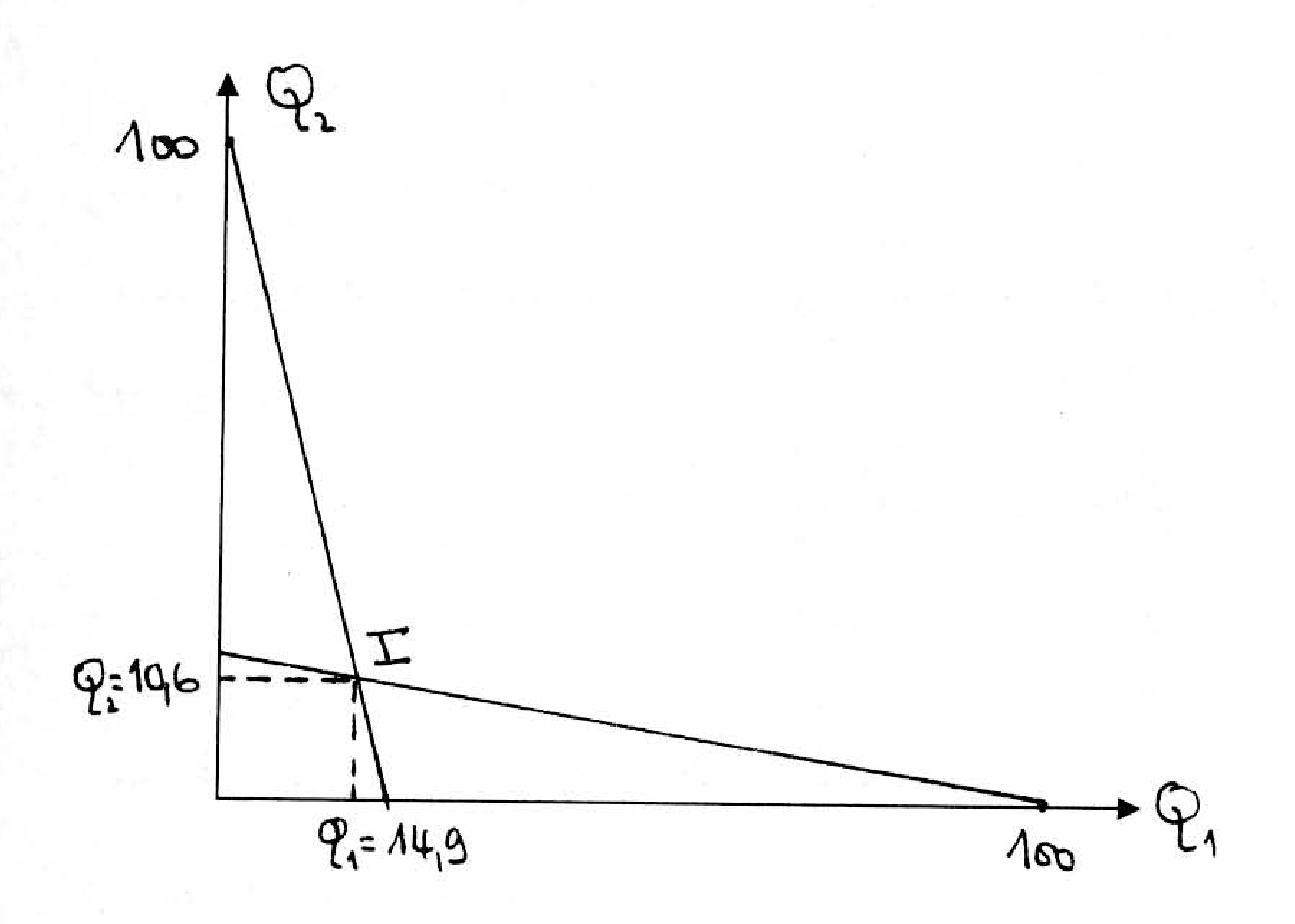
$$\pi = (100 - \varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 + \varphi_2) - C(\varphi_1) - \varphi(\varphi_2)$$

شرط تعظيم الربح ان نعدم المشتقات الجزئية الأولى

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi_1} &= 100 - 6\varphi_1 - 2\varphi_2 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial \varphi_2} &= 1000 - 2\varphi_1 - 8\varphi_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = 13,6 \\ \varphi_2 = 9 \end{cases}$$

$$\pi = 1106 \qquad p = 77,4$$

نلاحظ أن الربح الاجمالي ارتفع من 1086 إلى 1106.



القســـم الســـادس : احتكـــار القلة

تحديده : نقول عن السوق بأنه يسودها احتكار القلة عندما يكون عدد المنتجين قليلا.

السؤال الذي يطرح : ما هي استراتيجية كل مشروع تجاه الآخرين.

تطبيق عملي رقم 1

لدينا مشروعين ودالة الطلب على كل مشروع.

المشروع الأول : $p_1 = 200 - 4x_1 - 2x_2$

المشروع الثاني : $p_2 = 190 - 2x_1 - 6x_2$

دالة النفقة الكلية للمشروع الأول : $CT_1 = 5x_1^2$

دالة النفقة الكلية للمشروع الثاني : $CT_2 = 3x_2^2$

نفترض في بادئ الأمر أن المشروعان ينتجان نفس الكمية $x_1 = x_2 = 10$

سعر سلعة المشروع الأول : $p_1 = 140$ الثاني $p_2 = 110$

A : نفترض أن المشروع الأول يريد أن يرفع من سعر السلعة p_1

أما المشروع الثاني فيريد أن يحافظ على نفس السعر p_2

دالة الطلب بالنسبة للمشروع الثاني :

$$110 = 190 - 2x_1 - 6x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{40 - x_1}{3}$$

إذا ارتفع سعر السلعة الأولى p_1 انخفضت الكمية المطلوبة x_1

عندئذ تزيد الكمية المطلوبة x_2 نعوض x_2 بقيمتها في دالة الطلب على المشروع الأول فنحصل على :

$$p_1 = 200 - 4x_1 - 2\left(\frac{40 - x_1}{3}\right) = \frac{520 - 10x_1}{3}$$

نلاحظ أن السعر p_1 هو تابع للمتغير x_1 فقط.

نحسب الايراد الكلي $RT_1 = x_1\left(\frac{520 - 10x_1}{3}\right)$

نحسب الايراد الحدي $RMa_1 = x_1\left(\frac{520 - 20x_1}{3}\right)$

بما أن $x_1 = 10$ اذن قيمة الايراد الحدي $= RMa_1 = \frac{320}{3}$

نحسب النفقة الحدية للمشروع الأول : $CMa_1 = 10x_1 = 100$

يلاحظ المنتج أن الايراد الحدي يفوق قليلا النفقة الحدية. فإذا أراد أن يرفع من سعر السلعة، يخاف أن يفقد جزء من زبائنه لمصلحة المشروع الثاني .

نفترض أن المشروع الثاني لا يريد أن يغير من سعر سلعته. إذن لا يستطيع المشروع الأول أن يرفع من سعر السلعة p_1 لكي لا ينخفض ربحه الاجمالي.

B : نفترض أن المشروع الأول يريد أن يخفض من سعر سلعته. في هذه الحال يقوم المشروع الثاني بنفس العملية ويخفض من سعر سلعته p_1 لكي يحافظ على حصته في السوق $x_1 = x_2$

دالة الطلب على المشروع الأول : $p_1 = 200 - 6x_1$

دالة الايراد الكلي : $RT_1^1 = 200x_1 - 6x_1^2$

دالة الايراد الحدي : $RMa_1 = 200 - 12x_1$

إذا افترضنا $x_1 = 10$ قيمة الايراد الحدي $= RMa_1 = 80$

في هذه الحال يلاحظ المنتج بأن الايراد الحدي هو أقل من من النفقة الحدية : 80<100. فإذا ما خفض من سعر سلعته سوف يزيد من انتاجه لكن الربح الاجمالي سوف ينخفض. إذن من مصلحة المنتج الأول ألا يخفض من سعر سلعته p_1 بل انتاج الكمية $x_1 = 10$ وبيعها في السوق بالسعر $p_1 = 140$ لأن الايراد الحدي يفوق قليلا النفقة الحدية.

C : نفترض أن المشروع الأول يخفض من سعر سلعته p_1 بينما المشروع الثاني يحافظ على نفس السعر لسلعته p_2. دالة الطلب على المشروع الثاني $110 = 190 - 2x_1 - 6x_2$.

ومنها نجد $x_2 = \frac{40 - x_1}{3}$. نلاحظ أنه في حال انخفاض سعر السلعة الأولى p_1 سوف يؤدي إلى ارتفاع الكمية المطلوبة x_1، مما يؤدي إلى انخفاض الكمية المطلوبة x_2.

نعوض x_2 بقيمتها في دالة الطلب على المشروع الأول فنحصل على :

$$p_1 = 200 - 4x_1 - 2\left(\frac{40 - x_1}{3}\right) = \frac{520 - 10x_1}{3}$$

دالة الايراد الكلي $$RT_1 = \frac{520 - 10x_1^2}{3}$$

دالة الايراد الحدي $$RMa_1 = \frac{520 - 20x_1}{3}$$

اذا كان حجم الانتاج $x_1 = 10$ نجد أن الايراد الحدي يفوق النفقة الحدية 100<106,6.

بما أن المنتج يبحث عن تعظيم ربحه فسوف يزيد من انتاجه حتى تتعادل النفقة الحدية مع الايراد الحدي.

$$\frac{520-20x_1}{3}=10x_1 \Rightarrow x_1=10.4$$

عندئذ نحصل على سعر السلعة الأولى : $p_1=138.6$

أما المشروع الثاني فينتج الكمية $x_2=\dfrac{40-x_1}{3}$

نعوض $x_1=10,4$ ومنها نجد $x_2=9,87$

دالة الطلب على المشروع الأول $p_1=138,6=200-4x_1-2x_2$

ومنها نجد $x_1=\dfrac{61,4-2x_2}{4}$

نعوض x_1 بقيمتها في دالة الطلب على المشروع الثاني فنحصل على :

$$p_2=190-6x_2-2\left(\frac{61,4-2x_2}{4}\right)$$

دالة الطلب $p_2=159.3-5x_2$

دالة الايراد الكلي $RT_2=159,3x_2-5x_2^2$

دالة الايراد الحدي $RMa_2=159,3-10x_2$

إذا كان حجم الانتاج : $x_1=9,87$ إذن $RMa_2=60,6$

نحسب النفقة الحدية : $x_2=59,2$ $CMa_2=6x_2$

نلاحظ أن الايراد الحدي يفوق النفقة الحدية : $60,6>59,2$

إذن من مصلحة المشروع الثاني أن يخفض من سعر سلعته p_2 لكي يزيد من حجم انتاجه حتى تتعادل النفقة الحدية مع الايراد الحدي اي :

$$159,3-10x_2=6x_2 \Rightarrow x_2=9,95$$

سعر السلعة الثانية : $p_2=159,3-5x_2=109,6$

أما المشروع الأول فينتج الكمية : $x_1=\dfrac{61,4-2x_2}{4}=10,3$

نلاحظ أن إنتاج المشروع الأول انخفض من المقدار 10.4 إلى المقدار 10.3 وذلك لصالح المشروع الثاني والذي زاد انتاجه من : 9.87 إلى المقدار 9.95.

تطبيق عملي رقم 2

لدينا مشروعين في وضع احتكار القلة. لدينا دالة الطلب والنفقة الكلية لكل مشروع معطاة بالمعادلة :

$$p_1 = 100 - 2\varphi_1 - \varphi_2 \qquad CT_1 = \frac{5}{2}\varphi_1^2$$

$$p_2 = 95 - \varphi_1 - 3\varphi_2 \qquad CT_2 = 25\varphi_2$$

نفترض أن الأسعار والكميات تحددت كالتالي :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 10 \qquad p_1 = 70 \qquad p_2 = 55$$

السؤال : ما هي استراتيجية كل مشروع تجاه الآخر ؟

الحـــــل

A : نفترض أن المشروع الأول يريد أن يرفع من سعر سلعته p_1 نفترض أن المشروع الثاني يريد أن يحافظ على نفس السعر $p_2 = 55$ دالة الطلب على المشروع الثاني $\varphi_2 = \frac{40-\varphi_1}{3}$. إذا ارتفع سعر السلعة p_1 تنخفض الكمية المطلوبة φ_1 أما الكمية المطلوبة φ_2 فترتفع. نعوض φ_2 بقيمتها في دالة الطلب على المشروع الأول فنحصل على :

$$p_1 = 100 - 2\varphi_1 - \left(\frac{40-\varphi_1}{3}\right) = \frac{260-5\varphi_1}{3}$$

نحسب الايراد الكلي للمشروع الأول $RT_1 = \varphi_1\left(\frac{260-5\varphi_1}{3}\right)$

نحسب الايراد الحدي $RMa_1 = \frac{260-10\varphi_1}{3}$

إذا افترضنا $\varphi_1 = 10$ قيمة الايراد الحدي تساوي 53.3.

نحسب النفقة الحدية : $CMa_1 = 5\varphi_1 = 50$

نلاحظ أن الايراد الحدي يفوق قليلا النفقة الحدية. فإذا أراد المنتج أن يرفع من سعر سلعته يخاف أن يفقد قسما من زبائنه لمصلحة المشروع الثاني. نفترض أن المشروع الثاني لا يريد أن يغير من سعر سلعته p_2 . إذن ليس من مصلحة المشروع الأول أن يرفع من سعر سلعته.

B : يريد المشروع الأول أن يخفض من سعر سلعته. يقوم المشروع الثاني بنفس العملية ويخفض من سعر سلعته لكي يحافظ على حصته في السوق بحيث أن $\varphi_1 = \varphi_2$. نعوض ذلك بدوال الطلب.

دالة الطلب على المشروع الأول : $p_1 = 100 - 3\varphi_1$

دالة الايراد الكلي : $RT_1 = 100\varphi_1 - 3\varphi_1^2$

دالة الايراد الحدي : $RMa_1 = 100 - 6\varphi_1$

دالة النفقة الحدية : $CMa_1 = 5\varphi_1$

نفترض أن حجم الانتاج $\varphi_1 = 10$ اذن النفقة الحدية $= 50 = CMa_1$

أما الايراد الحدي فيساوي $40 = RMa_1$

نلاحظ أن الايراد الحدي هو أقل من النفقة الحدية 50>40.

فإذا ما خفض المنتج من سعر سلعته P_1 سوف يزيد من حجم انتاجه x_1 لكن الربح الاجمالي سوف ينخفض.

إذن ليس من مصلحة المنتج الأول تخفيض سعر سلعته p_1 بل انتاج الكمية $\varphi_1 = 10$ وبيعها دائما بالسعر $p_1 = 70$.

الفصـــل السادس

الانتاج المشترك

في كثير من الأحيان يقوم المشروع بانتاج أكثر من سلعة. في هذه الحال لا يمكن للمشروع فصل نفقات الانتاج المشتركة وذلك بتخصيص جزء منها للسلعة الأولى وجزء آخر للسلعة الثانية.

السؤال الذي يطرح : ما هو حجم الانتاج الأفضل من كل سلعة لتعظيم أرباح المنتج ؟

تطبيق عملي

لدينا دالة الطلب على سلعتين $\begin{cases} p_a = 28 - 3\varphi_a \\ p_b = 22 - 2\varphi_b \end{cases}$

لدينا دالة النفقة الكلية : $CT = \varphi_a^2 + 3\varphi_b^2 + 4\varphi_a\varphi_b$

السؤال : ما هو حجم الانتاج الأفضل الذي يعظم الربح ؟

الحـــل

نحسب الايراد الكلي لكل سلعة $RT_a = 28\varphi_a - 3\varphi_a^2$

نحسب الايراد الكلي للسلعتين $RT_b = 22\varphi_b - 2\varphi_b^2$

نحسب الربح الاجمالي = الايراد الكلي − النفقة الكلية

$$\pi = (28\varphi_a + 22\varphi_b) - (3\varphi_a^2 + 2\varphi_b^2) - (\varphi_a^2 + 3\varphi_b^2 + 4\varphi_a\varphi_b)$$

$$\pi = (28\varphi_a - 4\varphi_a^2 + 22\varphi_b - 5\varphi_b^2 - 4\varphi_a\varphi_b)$$

شرط تعظيم الربح أن نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi_a} &= 28 - 8\varphi_a - 4\varphi_b = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial \varphi b} &= 22 - 10\varphi_b - 4\varphi_a = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_a = 3 & p_a = 19 \\ \varphi_b = 1 & p_b = 20 \end{cases}$$

$$CT = 24 \qquad RT = 77 \qquad \pi = 53$$

لمعرفة ما إذا كان هذا الربح يشكل حدا أقصى أو أدنى نحسب المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية فنحصل على :

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial \varphi^2} = -8 \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial \varphi_b^2} = -10 \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} = -4$$

نحسب قيمة المحدد الهيسي $H = \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -10 \end{vmatrix} = 64 > 0$

بما أن قيمة المحدد موجبة هناك نهاية قصوى.

في هذه الحال ننظر إلى إشارة المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية بما أنها سالبة، فالقيمة $\pi = 53$ تشكل حدا أعظم.

مراجعــــة عامــــة

تمرين رقم 1 : لدينا دالة الطلب على سلعتين

$$\varphi_1 = 40 - 2p_1 + p_2$$
$$\varphi_2 = 15 + p_1 - p_2$$

لدينا دالة النفقة الكلية $CT = \varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2$

السؤال : ما هو حجم الانتاج الأفضل لتعظيم دالة الربح ؟

الحـــــل

نحسب سعر السلعة بدلالة الكمية المنتجة فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 + \varphi_2 &= 55 - p_1 \\ \varphi_1 + 2\varphi_2 &= 70 - p_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}p_1 &= 55 - (\varphi_1 + \varphi_2) \\ p_2 &= 70 - (\varphi_1 + 2\varphi_2)\end{aligned}$$

نحسب الايراد الكلي على السلعة الأولى $RT_1 = 55\varphi_1 - \varphi_1(\varphi_1 + \varphi_2)$

نحسب الايراد الكلي على السلعة الثانية $RT_2 = 70\varphi_2 - \varphi_2(\varphi_1 + 2\varphi_2)$

دالة الربح الاجمالي $\pi = RT - CT$

تعظيم دالة الربح يفترض نعدم المشتقات الجزئية الأولى

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial \varphi_1} &= 55 - 3\varphi_2 - 4\varphi_1 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial \varphi_2} &= 70 - 3\varphi_1 - 6\varphi_2 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\varphi_1 + 3\varphi_2 &= 55 \\ 3\varphi_1 + 6\varphi_2 &= 70\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

بحل جملة المعادلتين لمجهولين نحصل على كافة لعناصر.

أسعار السلعتين : $p_2 = 46,66$ ، $p_1 = 39,33$

الكميات المنتجة : $\varphi_1 = 7,66$ ، $\varphi_1 = 8$

ومنها نستخلص قيمة الربح : $\boxed{\pi = 488,33}$

تمرين رقم 2 : لدينا دالة الطلب على سلعتين

$$p_x = 13 - 2x - y$$
$$p_y = 13 - x - 2y$$

لدينا دالة النفقة الكلية $CT = x + y$

السؤال : ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟

الحـــــل

الايراد الكلي للسلعة الأول $RT_x = 13x - 2x^2 - 2xy$

الايراد الكلي للسلعة الثانية $RT_y = 13y - xy - 2y^2$

الايراد الكلي على السلعتين $RT = 13(x+y) - 2(x^2+y^2) - 2xy$

الربح الاجمالي $\pi = 12(x+y) - 2(x^2+y^2) - 2xy$

شرط تعظيم الربح أن نعدم المشتقات الجزئية الأولى.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \pi}{\partial x} = 12 - 4x - 2y = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial y} = 12 - 2x - 4y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 12 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على كافة العناصر.

$$x = y = 2 \quad ، \quad CT = x + y = 4 \quad ، \quad RT = 28$$

$$\pi = RT - CT = 28 - 4 = 24$$

لمعرفة ما إذا كنا أمام حد أقصى أم أدنى نحسب المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية فنحصل على :

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} = -4 \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} = -4 \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial y} = -2$$

نحسب قيمة المحدد الهيسي فنحصل على : $H = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 12 > 0$

بما أن قيمة المحدد موجبة هناك نهاية قصوى.

بما أن إشارة المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية هي سالبة فنحن أمام نهاية عظمى والربح يمثل أقصى ربح ممكن.

تمرين رقم 3 : لدينا دالة الطلب على ثلاث سلع

$$\begin{cases} p_a = 10 - 3\varphi_a \\ p_b = 20 - 5\varphi_b \\ p_c = 60 - 7\varphi_c \end{cases}$$

لدينا دالة النفقة الكلية $CT = 5\varphi_a + 2\varphi_b + 6\varphi_c$

السؤال : ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟

الحـــــل

الربح الاجمالي = الايراد الكلي على السلع الثلاث – النفقة الكلية المشتركة.

$$\pi = 10\varphi_a - 3\varphi_a^2 + 20\varphi_b - 5\varphi_b^2 + 6\varphi_c - 7\varphi_c^2 - 5\varphi_a - 2\varphi_b - 6\varphi_c$$

شرط تعظيم الربح أن نعدم المشتقات الجزئية الأولى.

$$\frac{\partial \pi}{\partial \varphi_a} = \frac{\partial \pi}{\partial \varphi_b} = \frac{\partial \pi}{\partial \varphi_c} = 0 \Rightarrow$$

$$(\varphi_a = \frac{5}{6}, \varphi_b = \frac{9}{5}, \varphi_c = \frac{27}{7})$$

$$(p_a \frac{15}{2}, p_b = 11, p_c = 33)$$

$$\begin{cases} RT = 153{,}3 \\ CT = 40{,}9 \\ \pi = 112{,}4 \end{cases}$$

تمرين رقم 4 : لدينا دالة الطلب على ثلاث سلع

$$\begin{cases} p_a = 21 - 5\varphi_a \\ p_b = 77 - 10\varphi_b \\ p_c = 30 - 2\varphi_c \end{cases}$$

لدينا دالة النفقة الكلية $CT = 2\varphi_a\varphi_b + \varphi_a\varphi_c + 3\varphi_b\varphi_c$

السؤال : ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟

الحـــل

نحسب الايراد الكلي $RT = 21\varphi_a - 5\varphi_a^2 + 77\varphi_b - 10\varphi_b^2 + 30\varphi_c - 2\varphi_c^2$

نحسب الربح الاجمالي $\pi = RT - CT = f(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c)$

شرط تعظيم الربح أن نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\frac{\partial \pi}{\partial \varphi_a} = \frac{\partial \pi}{\partial \varphi_b} = \frac{\partial \pi}{\partial \varphi_c} = 0 \Rightarrow$$

$$(\varphi_a = 1, \varphi_b = 3, \varphi_c = 5) \qquad \begin{cases} RT = 257 \\ CT = 56 \\ \pi = 201 \end{cases}$$
$$(p_a 16, p_b = 47, p_c = 20)$$

تمرين رقم 5 : ينتج مشروع سلعتين.

دالة الطلب على السلعة الأولى : $\varphi_1 = 150 - 2p_1 - p_2$

دالة الطلب على السلعة الثانية : $\varphi_2 = 200 - p_1 - 3p_2$

يرغب المشروع تحديد أسعار السلعتين بحيث أنه يريد أن يحقق أقصى إيراد كلي ممكن.

السؤال : أحسب أسعار السلعتين وقيمة الايراد الكلي ؟

الحـــل

دالة الايراد الكلي $RT = p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2$

$$RT = 150p_1 + 200p_2 - 2p_1p_2 - 2p_1^2 - 3p_2^2$$

شرط تعظيم هذه الدالة أن نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_1} &= 150 - 2p_2 - 4p_1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial p_2} &= 200 - 2p_1 - 6p_2 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2p_2 + 4p_1 = 150 \\ 2p_1 + 6p_2 = 200 \end{cases}$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلها نحصل على كافة العناصر.

$$p_1 = 25 \qquad \varphi_1 = 75 \qquad RT = 4375$$
$$p_2 = 25 \qquad \varphi_2 = 100$$

تمرين رقم 6 : لدينا دالة الايراد الكلي

$$RT = 400x - 4x^2 + 1960y - 8y^2$$

لدينا دالة النفقة الكلية $CT = 100 + 2x^2 + 4y^2 + 2xy$

x تمثل الكمية المنتجة منالسلعة الأولى A

y تمثل الكمية المنتجة من السلعة الثانية B

السؤال : ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟

الحـــــل

دالة الربح تساوي الايراد الكلي ناقص النفقة الكلية $\pi = RT - CT$

$$\pi = -6x^2 + 400x - 12y^2 + 1960y - 2xy - 100$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial x} &= -12x + 400 - 2y = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial y} &= -24y + 1960 - 2x = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على كافة العناصر.

$$\left.\begin{cases} 12x + 2y = 400 \\ 2x + 24y = 1960 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$x = 20 \qquad y = 80$$
$$CT = 29700$$
$$\pi = 82300$$
$$RT = 112000$$

تمرين رقم 7 : لدينا دالة الطلب على سلعتين

$$p_x = 12 - 2x$$
$$p_y = 32 - 4y$$

لدينا دالة النفقة الكلية $CT = x^2 + 2xy + y^2$

السؤال : ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟

الحـــــل

الايراد الكلي على السلعة الأولى $RT_x = 12x - 2x^2$

الايراد الكلي على السلعة الثانية $RT_y = 32y - 4y^2$

الايراد الكلي على السلعتين $RT = (12x + 32y) - (2x^2 + 4y^2)$

دالة الربح $\pi = RT - CT = f(x, y)$

تمر هذه الدالة بحدها الأقصى عندما نعدم المشتقات الجزئية الأولى :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial x} &= 12 - 6x - 2y = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial y} &= 32 - 10y - 2x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 12 \\ 2x + 10y = 32 \end{cases}$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على كافة العناصر.

$$\left.\begin{cases} x = 1 & P_x = 10 \\ y = 3 & P_y = 20 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} RT_x = 10 & CT = 16 \\ RT_y = 60 & \pi = 54 \end{matrix}$$

لمعرفة ما إذا كان الربح يشكل حدا أقصى نحسب المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية :

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} = -6 \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} = -10 \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial y} = -2$$

نحسب قيمة المحدد موجبة هناك حد أقصى H.

بما أن إشارة المشتقات سالبة فالربح يمثل حدا أقصى.

$$H = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = 54 > 0$$



الفصل السابع
أثر الضريبة والاعانة على سعر التوازن

يتحدد سعر التوازن عندما تتعادل الكميات المعروضة والمطلوبة بيانيا عند تقاطع منحنى العرض والطلب. عند فرض ضريبة على سعر السلعة، يبقى الطلب على حاله بينما العرض يتغير وعلى العكس في حال منح إعانة.

تطبيق عملي

لدينا دالة العرض $0 = 2p - 5$

لدينا دالة الطلب $D = 10 - p$

- أحسب سعر وكمية التوازن ؟ أرسم الخطوط البيانية.
- تفرض ضريبة بمقدار 3 دينار على كل وحدة منتجة، أحسب سعر وكمية التوازن الجديد ؟
- تمنح الدولة إعانة بمقدار 3 دينار، ما هو السعر والكمية الجديدين ؟
- ما هو معدل الضريبة الأفضل الذي يعظم حصيلة إيرادات الدولة ؟

الحل

يتحدد سعر التوازن عند تعادل العرض والطلب.

$$10 - p = 2p - 5 \Rightarrow p_e = 5 \qquad \varphi_e = 5$$

عند فرض ضريبة بمقدار 3 دينار يصبح العرض الجديد $0_1 = 2p - 11$

نعادل العرض الجديد مع الطلب فنحصل على سعر التوازن الجديد.

$$0_1 = 2p - 11 = 10 - p \Rightarrow 3p = 21 \Rightarrow \begin{cases} p_e = 7 \\ \varphi_e = 3 \end{cases}$$

في حال منح اعانة بمقدار 3 دينار تصبح دالة العرض الجديدة O_2

$$\begin{cases} O_2 = 2p + 1 \\ 2p + 1 = 10 - p \end{cases}$$

سعر التوازن الجديد هو : $\varphi_e = 7$ $\quad p_e = 3$

معدل الضريبة الأفضل الذي يعظم حصيلة إيرادات الدولة.

نفترض x معدل الضريبة. دالة العرض الجديدة :

$$0 = 2(p - x) = D = 10 - p \Rightarrow$$

سعر التوازن الجديد : $p_e = \frac{2}{3}x + 5$

كمية التوازن : $\varphi_e = 5 - \frac{2}{3}x$

حصيلة ايرادات الدولة : $T = x.\varphi_e = x(5 - \frac{2}{3}x)$

شرط تعظيم هذه الدالة أن نعدم المشتق الأول فنحصل على :

$$T' = 5 - \frac{4}{3}x = 0 \Rightarrow \qquad x = \frac{15}{4}$$

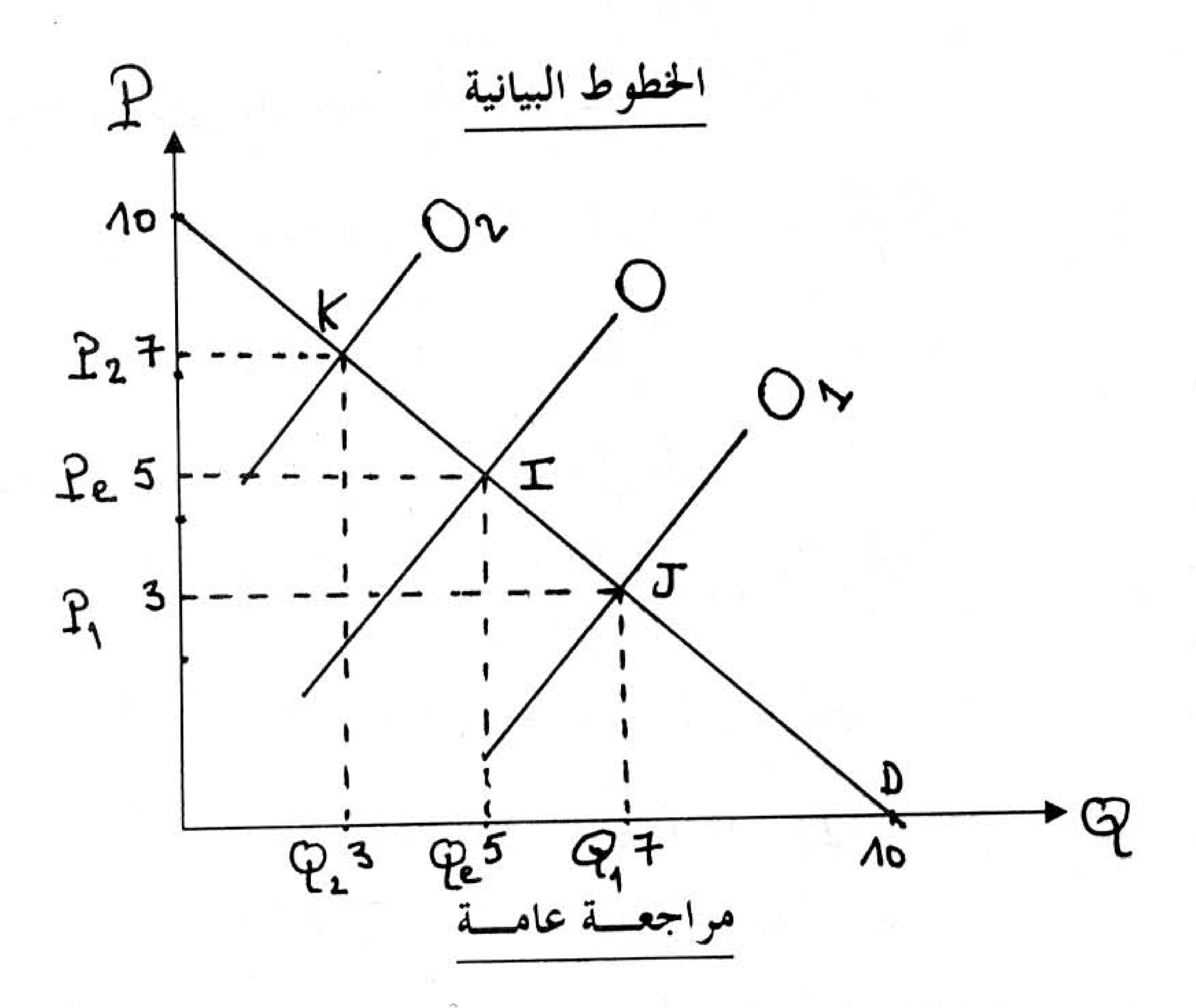
سعر التوازن الجديد : $p = \frac{2}{3}\left(\frac{15}{4}\right) + 5 = \left(\frac{15}{2}\right)$

كمية التوازن : $\varphi = 5 - \frac{2}{3}\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{5}{2}$

حصيلة ايرادات الدولة :

$$T = \frac{15}{4}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{75}{8}$$

الخطوط البيانية



مراجعـــة عامـــة

تمرين رقم 1 : لدينا دالة العرض $p = 9x + 9$

لدينا دالة الطلب $p = 39 - 3x^2$

- أحسب سعر وكمية التوازن ؟
- أحسب معدل الضريبة الذي يسمح برفع سعر السلعة بمقدار 3 دج ؟

الحـــــل

نحصل على سعر وكمية التوازن عندما نعادل العرض مع الطلب.

$$9x + 9 = 39 - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 + 9x - 30 = 0$$

الجذر الموجب $\boxed{x = 2}$ يمثل كمية التوازن.

سعر التوازن $p = 9(2) + 9 = 27$

- نريد أن يصبح سعر التوازن الجديد 30 دج = 3 + 27

دالة الطلب تبقى على حالها $x = \sqrt{13 - \frac{P}{3}}$

دالة العرض تتغير بعد فرض الضريبة = t ؛ $x = \frac{p-t}{9} - 1$

سعر التوازن الجديد : $\frac{p-t}{9} - 1 = \sqrt{13 - \frac{P}{3}}$

نعوض $P = 30$ ثم نربع الطرفين فنحصل على :

$$\left(\frac{30-t}{9}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{30-t}{9}\right) = 13 - \frac{30}{3} = 3$$

نفترض $y = \frac{30-t}{9}$ نحصل على معادلة من الدرجة الثانية.

$$y^2 - 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 + \sqrt{3} = 2,732$$

$$30 - t = 9(2,732) \Rightarrow \quad \boxed{t = 5,5}$$

هذا المقدار يمثل معدل الضريبة الذي يؤدي إلي رفع السعر بمقدار 3 دج.

تمرين رقم 2 : لدينا دالة الطلب $3p + 2\varphi = 27$

لدينا دالة العرض $6p - 2\varphi = 9$

- أحسب سعر وكمية التوازن ؟
- أحسب معدل الضريبة الأفضل الذي يعظم حصيلة ايرادات الدولة ؟

الحـــل

دالة الطلب $2\varphi = 27 - 3p \Rightarrow \varphi = 13,5 - 1,5p$

دالة العرض $2\varphi = 6p - 9 \Rightarrow \varphi = 3p - 4,5$

سعر التوازن $6p - 9 = 27 - 3p \Rightarrow p_e = 4$

كمية التوازن $\varphi_e = \frac{15}{2}$

نفترض معدل الضريبة الأفضل : x

دالة الطلب تبقى على حالها بينما دالة العرض الجديدة تصبح :

$$0 = 3(p - x) - 4,5$$

سعر التوازن الجديد : $3(p - x) - 4,5 = 13,5 - 1,5p \Rightarrow$

كمية التوازن الجديدة : $\varphi_e = \frac{15}{2} - x$ ، $p_e = \frac{2}{3}x + 4$

حصيلة ايرادات الدولة : $T = \frac{15}{2}x - x^2$

تعظيم هذه الدولة يفترض أن نعدم المشتق $T' = \frac{15}{2} - 2x = 0$

وبذلك نحصل على كافة العناصر : $p_e = \frac{13}{2}$ ، $x = \frac{15}{4}$

سعر التوازن الجديد : $p_e = \frac{13}{2}$

كمية التوازن الجديدة : $\varphi_e = \frac{15}{4}$

حصيلة ايرادات الدولة : $T = \frac{225}{16}$

تمرين رقم 3 : لدينا دالة العرض $p = \frac{2}{3}\varphi + 10$

لدينا دالة الطلب $p = 150 - \frac{1}{2}\varphi$

- أحسب سعر وكمية التوازن ؟ .
- ما هو معدل الضريبة الأفضل الذي يعظم حصيلة ايرادات الدولة ؟

الحـــــل

نحصل على سعر التوازن عندما نعادل ما بين العرض والطلب.

$$150-\frac{1}{2}\varphi=\frac{2}{3}\varphi+10\Rightarrow p_e=90 \quad ، \quad \varphi_e=120$$

بيانيا عند تقاطع منحنى العرض والطلب.

نفترض x معدل الضريبة الأفضل.

نحسب دالة العرض الجديدة $p=\frac{3}{2}(p-x)-15$

نعادل دالة العرض الجديدة مع دالة الطلب التي تبقى على حالها :

$$\frac{3}{2}(p-x)-15=300-2p$$

نحصل على كمية التوازن $\varphi_e=120-\frac{6}{7}x$

نحصل على سعر التوازن $p=90+\frac{3}{2}x$

حصيلة ايرادات الدولة $T=120x-\frac{6}{7}x^2$

تعظيم هذه الدالة يفترض أن نعدم مشتق الدالة.

$$120-\frac{12}{7}x=0\Rightarrow x=70$$

وبذلك نحصل على كمية التوازن $\varphi=120-\frac{6}{7}(70)=60$

سعر التوازن $p=90+\frac{3}{7}(70)=120$

حصيلة ايرادات الدولة $T=x.\varphi_e=70\times 60=4200$

الفصل الثامن

فائض المستهلك والمنتج

تحديده : يتحدد سعر التوازن عندما تتعادل الكميات المعروضة والمطلوبة.

بيانيا : عند تلاقي منحنى العرض والطلب. لكن هناك بعض المستهلكين مستعدون أن يدفعوا بالسلعة سعرا أعلى لولا المنافسة الحرة. نسمي فائض المستهلك الفارق ما بين السعرين. وهو معطى بالدستور التالي :

$$S.C = \int_0^{\varphi_e} f(\varphi)d\varphi - p_e\varphi_e$$

كذلك هناك بعض المنتجين مستعدون أن يبيعوا سلعتهم بسعر أقل من سعر التوازن. نسمي فائض المنتج الفارق ما بين السعرين. وهو معطى بالدستور التالي :

$$S.P = p_e\varphi_e - \int_0^{\varphi_e} \vartheta(\varphi)d\varphi$$

تطبيق عملي

لدينا دالة الطلب $p = 20 - 3\varphi$

لدينا دالة العرض $p = 2\varphi$

- أحسب سعر وكمية التوازن ؟
- أحسب فائض المستهلك والمنتج ؟

الحـــل

نرسم كلا من منحنى العرض والطلب. هذان المنحنيان يتقاطعان في النقطة I. إحداثياتها هي : (8 , 4)

نعادل الكميات المعروضة والمطلوبة

$$20-3\varphi=2\varphi \Rightarrow 5\varphi=20 \Rightarrow$$

$$\varphi_e=4 \qquad p_e=8$$

- فائض المستهلك معطى بالدستور التالي :

$$S.C=\int_0^{\varphi_e} f(\varphi)d\varphi - p_e\varphi_e$$

$$S.C=\int_0^4 (20-3\varphi)d\varphi-32=\int_0^4 (20\varphi-\frac{3}{2}\varphi^2)-32=24$$

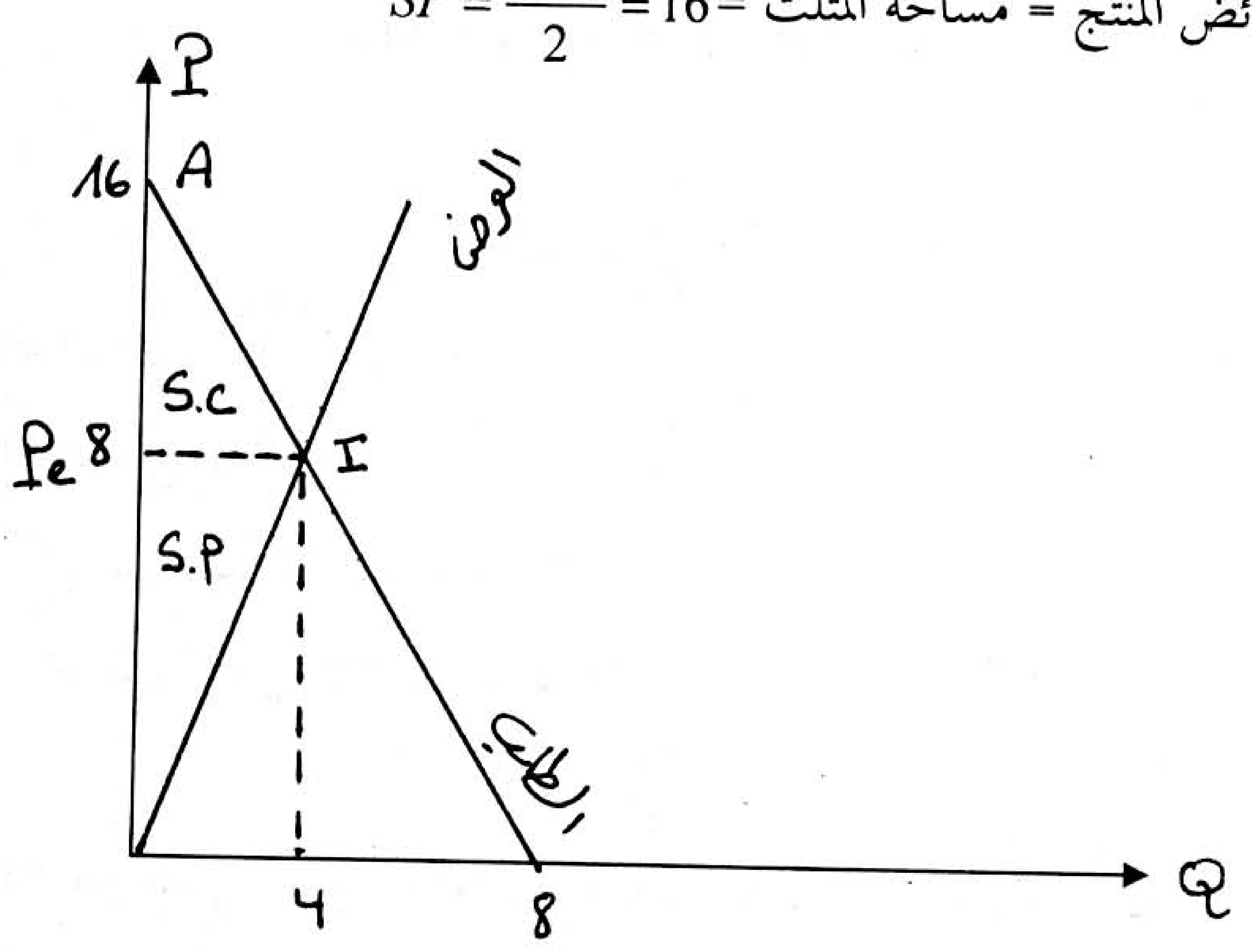
- فائض المنتج معطى بالدستور التالي :

$$S.P=32-\int_0^4 [\varphi^2]d\varphi=32-16=16$$

يمكن أن نصل إلى نفس النتيجة عن طريق مساحة المثلث.

فائض المستهلك = مساحة المثلث $SC=\frac{12\times 4}{2}=24 = AIC$

فائض المنتج = مساحة المثلث $SP=\frac{8\times 4}{2}=16=$



مراجعـــة عامـــة

تمرين رقم 1 : لدينا دالة العرض $p = 9x + 9$

لدينا دالة الطلب $p = 39 - 3x^2$

- أحسب سعر وكمية التوازن ؟
- أحسب فائض المستهلك والمنتج ؟

الحـــــل

- نحصل على سعر التوازن عندما يتعادل العرض والطلب.

$$9x + 9 = 39 - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 + 9x - 30 = 0$$

نحن أمام معادلة من الدرجة الثانية لها جذر موجب $x = 2$ يمثل كمية التوازن.

بتعويض x بقيمتها نحصل على سعر التوازن :

$$p = 9(2) + 9 = 27 = 39 - 12$$

- فائض المستهلك $S.C = \int_0^2 (39 - 3x^2)dx - 54 = 16$
- فائض المنتج $S.P = 54 - \int_0^2 (9x + 9)dx = 18$

تمرين رقم 2 : لدينا دالة الطلب : $p = 100 - 2\varphi - \varphi^2$

- أحسب فائض المستهلك في النقطة A $p_0 = 1$

الحـــــل

لحساب فائض المستهلك نطبق الدستور :

$$S.C = \int_0^{\varphi_e} f(\varphi)d\varphi - p_e\varphi_e$$

نعوض السعر والكمية بقيمها فنحصل على : $p_0 = 1 \Leftarrow \varphi_0 = 9$

$$S.C = \int_0^9 (100 - 2\varphi - \varphi^2)d\varphi - 9 = \left[100\varphi - \varphi^2 - \frac{\varphi^3}{3}\right]_0^9 - 9 =$$

$$S.C = 900 - 81 - 243 - 9 = 667$$

تمرين رقم 3 : لدينا دالة الطلب $p = 50 - 2\varphi$

لدينا دالة العرض $p = \varphi + 5$

- أحسب سعر وكمية التوازن ؟
- أحسب فائض المستهلك والمنتج ؟

الحـــــل

نرسم الخطوط البيانية لكل من دالة العرض والطلب.

هذان المستقيمان يتقاطعان في النقطة I (15 ، 20)

إحداثياتها تعطينا سعر وكمية التوازن.

نعادل العرض مع الطلب فنحصل على : $50 - 2\varphi = \varphi + 5 \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 20 \\ \varphi_0 = 15 \end{cases}$

فائض المستهلك : $S.C = \int_0^{15} (50 - 2\varphi)d\varphi - 300 = 225$

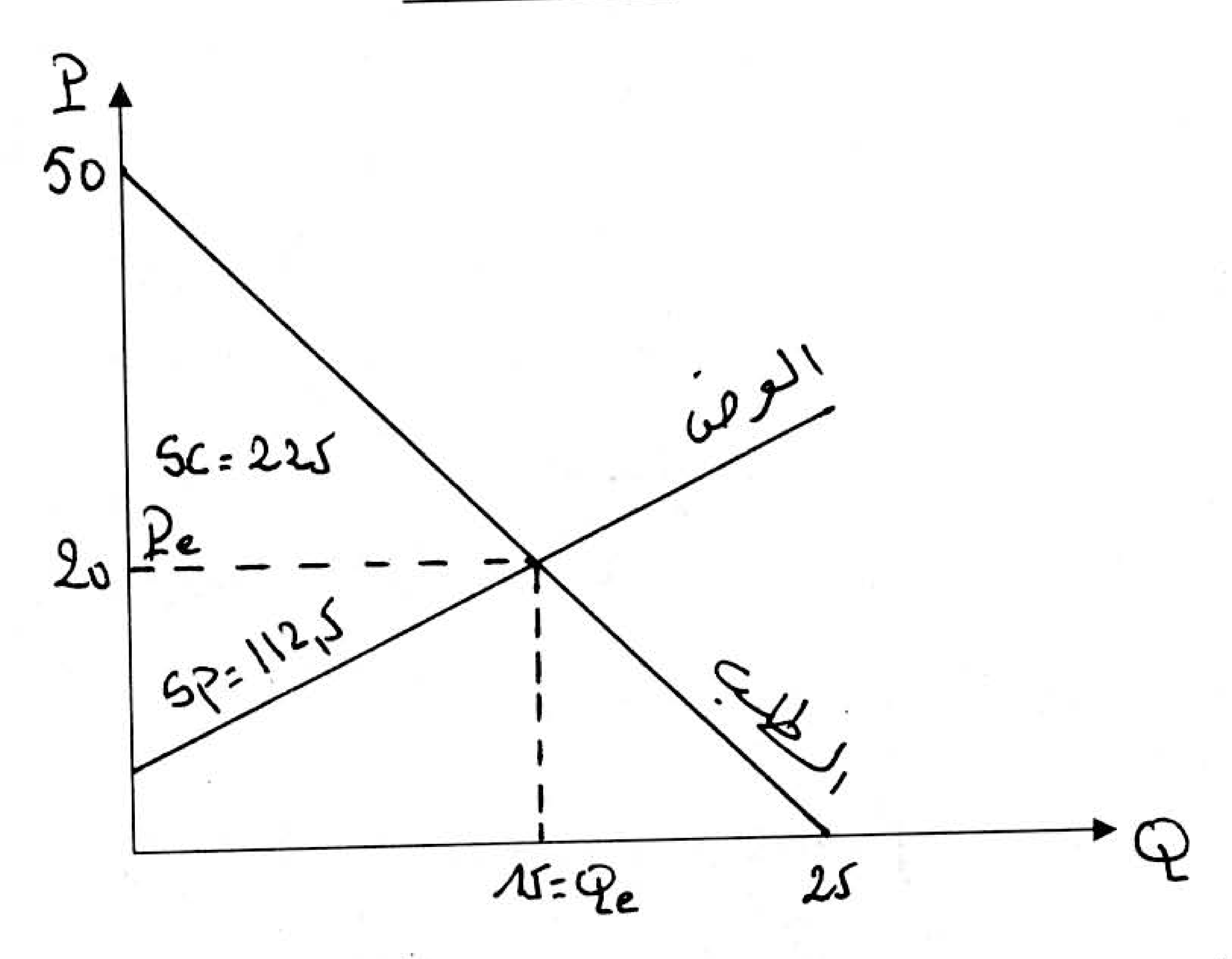
فائض المنتج : $S.P = 300 - \int_0^{15} (\varphi + 5)d\varphi = 112,5$

يمكن حساب ذلك بطريقة المساحات المثلثة.

فائض المستهلك = مساحة المثلث AIC $= 225 = \frac{30 \times 15}{2}$

فائض المنتج = مساحة المثلث BIC $= 112{,}5 = \frac{15 \times 15}{2}$

الخطوط البيانية



تمرين رقم 4 : لدينا دالة الطلب معطاة بالمعادلة التالية :

$$p = 36 - \varphi^2$$

– أحسب فائض المستهلك في النقطة A ، $p_0 = 11$

الحـــل

في النقطة A حيث أن السعر $p_0 = 11$ نحسب كمية التوازن فنحصل على :

$$11 = 36 - \varphi^2 \Rightarrow \varphi^2 = 36 - 11 = 25 \quad \varphi_0 = 5$$

فائض المستهلك معطى بالدستور التالي :

$$S.C = \int_0^{\varphi_e} f(\varphi)d\varphi - p_e\varphi_e$$

$$S.C = \int_0^6 (36-\varphi^2)d\varphi = 180 - \frac{135}{3} - 55 = \frac{250}{3}$$

تمرين رقم 5 : لدينا دالة الطلب والعرض التاليتين :

دالة الطلب : $p = 10 - \varphi - \varphi^2$

دالة العرض : $p = \varphi + 2$

- احسب سعر وكمية التوازن ؟
- احسب فائض المستهلك والمنتج ؟

الحــــل

نحصل على سعر وكمية التوازن عند تعادل العرض والطلب.

$$10 - \varphi - \varphi^2 = \varphi + 2 \Rightarrow \begin{cases} p_e = 4 \\ \varphi_e = 2 \end{cases}$$

فائض المستهلك معطى بالدستور : $S.C = \int_0^{\varphi_e} f(\varphi)d\varphi - p_e\varphi_e$

$$SC = 20 - 2 - \frac{8}{3} - 8 = \frac{22}{3}$$

فائض المنتج معطى بالدستور :

$$S.P = 8 - \int_0^2 (\varphi + 2)d\varphi = 8 - (2+4) = 2$$

تمرين رقم 6 : لدينا دالة العرض : $0 = x^2 + 3x + 2$

لدينا دالة الطلب $D = -2x + 16$

- أحسب فائض المستهلك والمنتج ؟

الحـــــل

سعر التوازن : العرض = الطلب ومنها نحصل على سعر التوازن $p_0 = 12$ ،

$\varphi_0 = 2$

فائض المستهلك : $S.C = \int_2^2 (-2x+16)dx - 24 = 4$

فائض المنتج : $S.P = 24 - \int_0^2 (x^2+3x+2)dx = \frac{34}{3}$



الفصل التاسع

تقييم المشاريع

مقدمة

يتميز العصر الحالي بالاتجاه المتزايد نحو ضخامة حجم الاستثمارات سواء التي تقوم بها الدولة أو التي تقوم بها المشاريع. يعتبر الاستثمار الأداة الرئيسية للنمو الاقتصادي كما أنه يلعب دورا هاما في مستوى التوظيف حسب كينز. إن نجاح المشروع يتوقف على مدى سلامة القرارات الاستثمارية التي تتخذ عند انشائها. أن الاستثمار يؤدي إلى إنفاق مبالغ ضخمة ليس من السهل تعديله إذا ما تبين فيما بعد عدم سلامة هذه القرارات.

في الآداب، الاقتصادية المعاصرة يسعى المؤلفون إلى ربط الاستثمار ببعض المؤشرات ومن أشهرها :

مؤشر القيمة الحالية للأرباح.

مؤشر المردود الداخلي.

A : القيمة الحالية للأرباح : هناك طريقتان لحساب القيمة الحالية للأرباح.

الطريقة الأولى : طريقة الموارد الصافية.

هي عبارة عن الفارق ما بين الموارد والنفقات السنوية، هذه القيمة معطاة بالدستور التالي :

$$BA = \frac{\sum CF}{(1+i)^n} - I$$

I تمثل قيمة الالة عند شرائها أو الاستثمار.

$\sum CF$ تمثل الموارد الصافية.

i تمثل معدل الفائدة.

n تمثل عدد السنين.

الطريقة الثانية : طريقة الربح الحسابي.

نأخذ بعين الاعتبار اهتلاك راس المال. أما الفائدة فلا تحسب إلا على الجزء المتبقي من راس المال بعد اقتطاعه.

B : معدل المردود الداخلي : هو المعدل r الذي يجعل القيمة الحالية للأرباح معدومة.

مثال : آلة قيمتها 327000 دج = I تعطي موارد صافية سنوية بمقدار 100.000 دج خلال خمس سنوات. ما هو معدل المردود الداخلي ؟

الحـــل

$$BA = \frac{\sum CF}{(1+r)^n} - I = 0 \Rightarrow BA = \frac{(10)^5}{(1+r)} + ... + \frac{(10)^5}{(1+r)^5} = 327000$$

من الجداول المالية نستخرج قيمة $r = \%16$. فإذا كان معدل الفائدة $i < r$ فالمشروع مقبول. أما إذا كانت $i > r$ فالمشروع مرفوض.

- نطلق اسم راس المال القيمة على الكمية $k = \frac{\sum CF}{(1+i)^n}$

- نسمي مؤشر الربحية المقدار $\frac{k}{I}$. بوجه عام يكون المشروع مقبولا اذا كانت القيمة الحالية للأرباح موجبة $BA > 0$ أي أن $\frac{k}{I} > 1 \Rightarrow k > I$ أي أن مؤشر الربحية يكون أكبر من الواحد.
- فترة الاسترداد : هي الفترة الزمنية التي من خلالها يستطيع المستثمر أن يسترد كافة أمواله.

تطبيق علمي

يكلف مشروع مبلغ 48.000 دج. يعطي موارد صافية خلال أربع سنوت $n = 4$ حسب الجدول التالي. معدل الفائدة $i = \%10$ طريقة حساب اهتلاك راس المال خطية. وتساوي حاصل قسمة الاستثمار على عدد السنين $\frac{48000}{4} = 12000$ دج.

السؤال : هل المشروع مقبول أم مرفوض ؟

الحل

السنة	الموارد الصافية	اهتلاك راس المال	راس المال –الإهتلاك	الفائدة على راس المال	الربح الحسابي
1	10400	12000	48000	4800	-6400
2	13400	12000	36000	3600	-2200
3	14600	12000	24000	2400	+200
4	17000	12000	12000	1200	+3800

حساب القيمة الحالية للأرباح بالطريقتين :

- طريقة الموارد الصافية : $BA = \frac{10400}{1,1} + \frac{13400}{(1,1)^2} + \frac{14600}{(1,1)^3}$

$$+ \frac{17400}{(1,1)^4} - I = -4890DA$$

- طريقة الربح الحسابي : نطرح من قيمة الموارد الصافية اهتلاك رأس المال مع الفائدة على رأس المال.

$$BA = -\frac{6400}{1,1} - \frac{2200}{(1,1)^2} + \frac{300}{(1,1)^3} + \frac{3800}{(1,1)^4} = -4890DA$$

في الحالتين نصل إلى نفس النتيجة أي أن المشروع مرفوض لأن القيمة الحالية للأرباح سالبة.

- حساب معدل المردود الداخلي : من الجداول المالية نجد : $r = \%5,55$

<u>تمرين رقم 1</u> : لدينا مشروعين نريد أن نقارن ما بينهما للاختيار. كلفة كل مشروع 50.000 = I. المشروع الأول يعطي دخلا صافيا كل عام قدره 16.447 دج لمدة أربع سنوات. أما المشروع الثاني فلا يعطي دخلا إلا في السنة الرابعة يقدر بـــ 73206 دج. نفترض أن معدل الفائدة $i = \%6$.

السؤال : ما هو معدل المردود الداخلي لكل مشروع ؟

<u>الحـــــل</u>

نحسب القيمة الحالية لكل مشروع للمفاضلة فنجد :

$$BA_1 = -50000 + 16447\left(\frac{(1-1,06)^{-4}}{0,06}\right) = 7071 \text{ دج}$$

بالنسبة للمشروع الثاني لدينا :

$BA_{II} = -50000 + 73.206(1-0,6)^{-4} = =$ 7979 دج

نلاحظ أن المشروع الثاني أفضل من الأول.

- معدل المردود الداخلي لكل مشروع :

المشروع الأول : $-5000 + 16447\left|\frac{1-(1+r)^{-4}}{r}\right| = 0 \Rightarrow r = \%12$

بالنسبة للمشروع الثاني : $-5000 + 73206(1+r)^{-4} = 0 \Rightarrow r = \%10$

نلخص ذلك في الجدول التالي :

معدل المردود الداخلي	القيمة الحالية للأرباح	المشاريع
%12	7071 دج	المشروع الأول
%10	7979 دج	المشروع الثاني

لو قارنا القيمة الحالية للأرباح بالنسبة لمعدل فائدة 6% وهذا يؤدي إلى اختيار المشروع الثاني. بينما لو اردنا مقارنة معدل المردود الداخلي للمشروعين لأدى ذلك إلى اختيار المشروع الأول لأن :

$r_2 = \%10$ $r_1 = 12\%$. هذا يعني بأن هناك معدل t^*

بحيث أن المعدلين يتساويان من الناحية المالية

المشروع الأول يكون أفضل $t > t^*$

المشروع الثاني يكون أفضل $t < t^*$

تمرين رقم 2 : لدينا مشروعين نريد أن نفاضل بينهما : المشروع A نفقات الاستثمار 20000دج =I. يعطي موارد صافية خلال فترة أربع سنوات بمقدار 9000 دج كل عام.

المشروع B نفقات الاستثمار = 10000دج =I يعطي موارد صافية خلال أربع سنوات بمقدار 5000 دج كل عام.

- أحسب القيمة الحالية للأرباح لكل مشروع علما بأن معدل الفائدة $i = \%12$
- نفترض معدل الفائدة $i = \%25$ اي المشروعين أفضل ؟
- أحسب معدل المردود الداخلي لكل مشروع ؟

الحـــــل

- نحسب القيمة الحالية للأرباح لكل مشروع على أساس أن معدل الفائدة هو $i = \%12$.

المشروع الأول :7336 دج= $BA_I = -20000 + \frac{9000}{1,12} + ... + \frac{9000}{(1,12)^4}$

المشروع الثاني :5184 دج= $BA_{II} = -10000 + \frac{5000}{1,12} + ... + \frac{5000}{(1,12)^4}$

نلاحظ أن المشروع الأول أفضل من الثاني.

- عندما يصبح معدل الفائدة $i' = 25\%$ نحصل على النتائج التالية :

بالنسبة للمشروع الأول : 1254 دج = BA_I

بالنسبة للمشروع الثاني : 1808 دج = BA_{II}

النتيجة : نلاحظ أن المشروع الثاني هو الأفضل.

- معدل المردود الداخلي لكل مشروع :

بالنسبة للمشروع الأول : $BA_I = \sum_{i=1}^{4} \frac{9000}{1+r_1} - 20000 = 0 \Rightarrow r_1 = \%25$

بالنسبة للمشروع الثاني : $BA_{II} = \sum_{i=1}^{4} \frac{5000}{1+r_2} - 10000 = 0 \Rightarrow r_2 = \%35$

النتيجة : نلاحظ أن المشروع الثاني أفضل.

تمرين رقم 3 : تريد شركة أن تختار ما بين آلتين. لدينا العناصر التالية **معطاة** بالجدول التالي : لدينا معدل الفائدة ويساوي $i = \%10$

- أي الآلتين افضل بعد حساب كل من القيمة الحالية للأرباح ومؤشر الربحية ؟
- نفترض ضريبة على الأرباح بمعدل 50%. لو أخذنا بعين الاعتبار اهتلاك راس المال. إلى اية نتيجة نصل ؟

العناصر	الآلة الأولى	الآلة الثانية
ثمن شراء الآلة	1200	1500
فترة الاستخدام	3 سنوات	3 سنوات
الايرادات السنوية	1000 1200 1000	1500 1000 1200
النفقات السنوية	500 600 500	600 600 700

الحـــل

بالنسبة للآلة الأولى :

العناصر	بدء السنة الأولى	نهاية السنة الأولى	نهاية السنة الثانية	نهاية السنة الثالثة
الايرادات	0	1000	1200	1000
النفقات	-1200	-500	-600	500
الموارد الصافية	-1200	500	600	500
$\sum \frac{CF}{(1+i)^n}$	-1200	454	496	376

بالنسبة للآلة الثانية :

العناصر	بدء السنة الأولى	نهاية السنة الأولى	نهاية السنة الثانية	نهاية السنة الثالثة
الايرادات	0	1500	1000	1200
النفقات	-1500	-600	-600	-700
الموارد الصافية	-1500	900	400	500
$\sum \frac{CF}{(1+i)^n}$	-1500	818	330	376

- نحسب القيمة الحالية للأرباح لكل من الآلتين فنحصل على النتائج التالية:

الآلة الأولى: 126 دج $BA_I = -1200 + 454 + 376 + 496 =$

الآلة الثانية : 24 دج = $BA_{II} = -1500 + 818 + 330 + 376 =$

النتيجة : نجد أن الآلة الأولى أفضل من الثانية.

- نحسب مؤشر الربحية لكل من الآلتين :

الآلة الأولى : $\frac{454 + 496 + 376}{1200} = 1{,}105$

الآلة الثانية : $\frac{376 + 330 + 818}{1500} = 1{,}016$

نصل إلى نفس النتائج كما وجدناها في القيمة الحالية للأرباح.

- نأخذ بعين الاعتبار اهتلاك راس المال، نحسب الأرباح الصافية لكل آلة فنحصل على الجدول التالي :

العناصر	السنة الأولى		السنة الثانية		السنة الثالثة	
	الألة A	الألة B	الألة A	الألة B	الألة A	الألة B
الايرادات	1000	1500	1200	1000	1000	1200
النفقات	-500	-600	-600	-600	-500	-700
الاهتلاك	-400	-500	-400	-500	-400	-500
الأرباح الاجمالية	100	400	200	-100	100	0
الأرباح الصافية	50	200	100	0	50	0

- نأخذ بعين الاعتبار الضرائب على الأرباح تنخفض قيمة الموارد الصافية بنفس النسبة فنحصل على الجدول التالي :

العناصر	نهاية السنة الأولى		نهاية السنة الثانية		نهاية السنة الثالثة	
	الألة A	**الألة B**	**الألة A**	**الألة B**	**الألة A**	**الألة B**
الايرادات	1000	1500	1200	1000	1000	1200
النفقات	-500	-600	-600	-600	-500	-700
الاستثمار	-	-	-	-	-	-
الضرائب	-50	-200	-100	0	-50	0
الموارد الصافية	450	700	500	400	450	500
الموارد الصافية الحالية	409	636	413	330	338	376

نحسب القيمة الحالية للأرباح لكل آلة فنحصل على النتائج التالية :

بالنسبة للآلة A : BA=-1200+(409+413+338)=-40

بالنسبة للآلة B : BA=-1500+(636+330+376)=-158

النتيجة : المشروعان مرفوضان لأن القيمة الحالية للأرباح سالبة.

تمرين رقم 4 : شركة تريد أن تختار ما بين مشروعين. نفقات استثمار كل مشروع تقدر بـــ 10000 دج. يدوم المشروع الأول 4 سنوات والثاني 5 سنوات. معدل الضريبة على الأرباح 50%. معدل الفائدة 10%. النفقات

السنوية لكل مشروع تقدر بـــ 1000 دج. الايراد السنوي معطى بالجدول التالي :

- أحسب القيمة الحالية للأرباح بالطريقتين ؟
- أحسب فترة الاسترداد ومؤشر الربحية ؟

الحـــــل

المشروع الأول :

الأرباح بعد الضريبة	الموارد بعد الضريبة	الفائدة على راس المال	اهتلاك راس المال	الموارد الصافية	النفقة السنوية	الايراد السنوي
-500	3000	1000	2000	3000	1000	4000
-250	3000	750	2000	3000	1000	4000
500	2500	500	2000	4000	1000	5000
625	3375	250	2000	4000	1000	5000

المشروع الثاني :

الأرباح بعد الضريبة	الموارد بعد الضريبة	الفائدة على راس المال	اهتلاك راس المال	الموارد الصافية	النفقة السنوية	الايراد السنوي	السنة
0	3000	1000	2000	3000	1000	4000	الأولى
100	2900	800	2000	3000	1000	4000	الثانية
600	2000	600	2000	2000	1000	3000	الثالثة
400	2000	400	2000	2000	1000	3000	الرابعة
200	2000	200	2000	2000	1000	3000	الخامسة

• حساب القيمة الحالية للأرباح للمشروعين :

الطريقة الأولى : طريقة الموارد الصافية.

المشروع الأول :

$$BA_I = \frac{3000}{(1,1)} + \frac{3000}{(1,1)^2} + \frac{3500}{(1,1)^3} + \frac{2375}{(1,1)^4} = 141,3$$

المشروع الثاني :

$$BA_{II} = \frac{3000}{(1,1)} + \frac{2900}{(1,1)^2} + \frac{2000}{(1,1)^3} + \frac{2000}{(1,1)^4} + \frac{2000}{(1,1)^5} = -765,5$$

نلاحظ أن المشروع الأول مقبول فقط لأن القيمة الحالية للأرباح موجبة.

الطريقة الثانية : طريقة الربح الحسابي.

المشروع الأول :

$$BA_I = -\frac{500}{(1,1)} - \frac{200}{(1,1)^2} + \frac{500}{(1,1)^3} + \frac{625}{(1,1)^4} = +141,3$$

المشروع الثاني :

$$BA_{II} = 0 + \frac{100}{(1,1)^2} - \frac{600}{(1,1)^3} - \frac{400}{(1,1)^4} - \frac{200}{(1,1)^5} = -765,5$$

وهكذا نصل إلى نفس النتيجة اي أن المشروع الأول مقبول فقط.

• حساب مؤشر الربحية.

بالنسبة للمشروع الأول : $\frac{k}{I} = \frac{BA}{I} + 1 = 1,014$

بالنسبة للمشروع الثاني : $\frac{k}{I} = \frac{BA}{I} + 1 = 0,923$

النتيجة : المشروع الأول مقبول فقط.

• حساب فترة الاسترداد.

بالنسبة للمشروع الأول : $3000 + 3000 + 3000 + \frac{3375}{6}$

إذن نلاحظ أن فترة الاسترداد هي ثلاث سنوات وشهرين.

بالنسبة للمشروع الثاني : 3000 + 2900 +2000 + 2000 + 2000/12

نلاحظ أن فترة الاسترداد هي أربع سنوات وشهر.

تمرين رقم 5 : قيمة آلة تقدر بـــ 100.000 دج = I. تعطي موارد صافية معطاة بالجدول التالي. نفترض معدل الفائدة = 14% = i.

معدل الضريبة = 50%. نحسب اهتلاك راس المال.

بالطريقة الخطية : $\frac{100.000}{4} = 25000$ كل عام.

بالطريقة التنازلية : (19000, 23000, 27000, 31000)

المطلوب حساب القيمة الحالية للأرباح بالطريقتين.

الحـــــل

الطريقة الأولى : الاهتلاك الخطي.

الحالة الأولى : اهتلاك راس المال بالطريقة الخطية.

BA= -100000 + (28500 + 28856 + 23625 + 18957) = - 72

السنة	اهتلاك راس المال	الموارد الصافية	الضريبة %50	الموارد الصافية بعد الضريبة	$\frac{1}{(1+i)^n}$	الموارد الصافية الحالية
0	-	-10^5	-	-	1	-10^5
1	25000	40000	7500	32500	0،8772	28500
2	25000	50000	12000	37500	0،7695	28856
3	25000	45000	10000	35000	0،6750	23625
4	25000	39000	7000	32000	0،5921	18957

الطريقة الثانية : الاهتلاك التنازلي.

الحالة الثانية : اهتلاك راس المال بالطريقة التنازلية.

BA =-100000 + (31140 + 29626 + 22950 + 17171) = 887

السنة	اهتلاك راس المال	الموارد الصافية	الضريبة %50	الموارد الصافية بعد الضريبة	$\frac{1}{(1+i)^n}$	الموارد الصافية الحالية
0	-	-10^5	-	-	1	-10^5
1	31000	40000	4500	35500	0،8772	31140
2	27000	50000	11600	38500	0،7695	29626
3	23000	45000	11000	34000	0،6750	22950
4	19000	39000	10000	29000	0،5921	17171

النتيجة : الاستثمار غير مجدي في الحالة الأولى ومجدي في الحالة الثانية. إذن يختلف إتخاذ القرار حسب طريقة حساب اهتلاك راس المال.

الفصل العاشر

تطبيق المتواليات في الميدان الاقتصادي

الفقرة الأولى : نظرية مالتوس في السكان

لقد عرض الاقتصادي مالتوس نظريته في كتابه " رسالة في مبادئ الاقتصاد " تدور الفكرة حول نمو السكان وذلك بإجرائه مقارنة ما بين زيادة السكان وزيادة انتاج المواد الغذائية. لقد توصل إلى النتائج التالية :

- يزيد السكان حسب متوالية هندسية اساسها $r = 2$

$$A, = \{1,2,4,8,16...\}$$

- يزيد الانتاج الزراعي حسب متوالية حسابية اساسها $r = 1$

$$B, = \{1,2,3,4,5...\}$$

أما الفرق الزمني بين كل عددين متتاليين وهو حسب رأيه 25 سنة.

النتيجة : إذا لم يكن هناك اي رادع لوقف زيادة السكان فالانفجار السكاني سوف يؤدي إلى الضغط على المواد الغذائية وتحل مجاعة في البلاد تحد من تكاثر السكان.

بوجه عام يمكن القول بأن نظرية مالتوس صالحة في الدول النامية فمعدل زيادة السكان مرتفع يتجاوز في بعض الدول 3% كما هو الحال في الجزائر. أما معدل الانتاج الغذائي فما يزال ضعيفا.

أما في الدول المصنعة فنظرية مالتوس خاطئة لأن الدول المصنعة عرفت منذ زمن بعيد الثورة الديمغرافية وذلك بتخفيض معدل زيادة السكان حتى

وصل إلى 1% واقل. أما في الميدان الزراعي، فبفضل التقدم التكنولوجي ارتفعت معدلات الانتاج حتى انقلبت الاية واصبح هناك فائض في الانتاج.

تمارين تطبيقية

(1) إذا كان تعداد السكان في بلد ما هو 100 ألف نسمة، نفرض ان معدل زيادة السكان 3%.

السؤال : ما هو عدد السكان بعد 4 سنوات ؟

الحـــل

نطق دستور الفائدة المركبة $P_n = P_0(1+t)^n = 10^5(1,03)^4$

باستخدام اللوغاريتمات نحصل على :

$$\log P_n = \log P_0 + n\log(1+t)$$
$$\log P_n = 5 + 4\log(1,03)$$
$$\boxed{P_n \approx 112.550}$$

(2) عدد سكان الجزائر 20 مليون نسمة عام 1980، معدل نمو السكان 3% في السنة. بعد كم سنة يتضاعف سكان الجزائر ؟

الحـــل

نطبق الدستور $P_n = P_0(1+t)^n$

$$\log P_n = \log P_0 + n\log(1+t)$$

حسب معطيات المسألة $P_n = 2P_0$ إذن

$$2P_0 = P_0(1+t)^n \Rightarrow \log 2 = n\log(1+t)$$

$$n = \frac{\log 2}{\log(1+t)} = \frac{\log 2}{\log(1,03)} \approx$$ الفترة 23 عام و 5 اشهر

(3) نود دراسة تطور السكان في مدينتين A و B، نفترض ان عدد سكان المدينة A في السنة n هو P_n وعدد سكان المدينة B هو φ_n. لدينا المعلومات التالية عن المدينتين.

- بالنسبة للمدينة A عدد السكان في الزمن $t = 0$ هو $P_0 = 40$ ومعدل زيادة السكان السنوية 1%.
- بالنسبة للمدينة B عدد السكان في الزمن $t = 0$ هو $\varphi_0 = 30$ ومعدل زيادة السكان السنوية 2%.

السؤال : أحسب P_n و φ_n بدلالة n. بعد كم سنة يتعادل سكان المدينتين؟

الحـــل

تطور سكان مدينة A : $P_n = P_0(1+t)^n$

تطور سكان مدينة B : $\varphi_n = \varphi_0(1+t)^n$

نعوض فنحصل على :

$$P_n = 40(1,01)^n$$
$$\varphi_n = 30(1,02)^n$$

بتعادل سكان المدينتين عندما $P_n = \varphi_n$

$$40(1,01)^n = 30(1,02)^n \Rightarrow$$ $n =$ 29 سنة

عندئذ نجد بأن $P_n = \varphi_n = 53M$ عدد سكان المدينتين

المضـــــاعفـــــات

الفقرة الثانية : مضاعف الاستثمار لدى كينز

حسب نظرية كينز يتشكل الدخل القومي من نوعين من النفقات نفقات استهلاك ونفقات استثمار. $R = C + I \Leftarrow \Delta R = \Delta C + \Delta I$

تزايد الاستثمار = تزايد الدخل ناقص تزايد الاستهلاك.

$$\Delta I = \Delta R - \Delta C$$

نقسم تزايد الدخل على تزايد الاستثمار فنحصل على مضاعف الاستثمار.

$$K = \frac{\Delta R}{\Delta I} = \boxed{\frac{1}{1-c} = \frac{1}{s}}$$

مضاعف الاستثمار يساوي مقلوب الميل الحدي للادخار $K = \frac{1}{s}$

نسمي الميل الحدي للادخار النسبة ما بين تزايد الادخار على تزايد الدخل $s = \frac{\Delta S}{\Delta R}$

نسمي الميل الحدي للاستهلاك النسبة ما بين تزايد الاستهلاك على تزايد الدخل $c = \frac{\Delta c}{\Delta R}$

مجموع الميل الحدي للادخار والميل الحدي للاستهلاك يساوي الواحد

$$\boxed{c + s = 1}$$

تطبيق عملي

قامت الدولة بشق طريق، كلفها المشروع مليون دينار $\Delta I = 1M\ DA$ هذه العملية تؤدي إلى توزيع مداخيل على كل من ساهم في عملية شق الطريق اي

المهندسين والعمال، إذن $\Delta R = 1M$ DA يقوم هؤلاء الأشخاص بإنفاق جزء من دخلهم على الاستهلاك. نفرض أن الميل الحدي للاستهلاك $\frac{\Delta c}{\Delta R} = \frac{3}{4}$ إذن الميل الحدي للادخار $\frac{\Delta s}{\Delta R} = \frac{1}{4}$ مضاعف الاستثمار $K = \frac{1}{s} = \frac{1}{1-c} = 4$

بمعنى آخر زيادة الاستثمار بمليون دينار يؤدي إلى زيادة الدخل القومي بأربعة ملايين دينار.

$$\boxed{\Delta R = K.\Delta I} \qquad K = \frac{1}{s}$$

الفقرة الثالثة : مضاعف الائتمان

عندما يودع شخص ما مبلغا من المال لدى بنك تجاري يقوم هذا الأخير باحتفاظ بجزء من المبلغ لمجابهة طلبات أصحاب الودائع. مثلا $r = \%20$ والباقي يقدمه قرضا لعملائه 80% يتقاضى البنك لقاء ذلك القرض على فائدة. إن المستفيد من القرض بإمكانه أن يودع المبلغ في بنك آخر ويتحول القرض إلى وديعة. يتصرف هذا البنك الأخير كالأول اي أنه يحتفظ بجزء من المبلغ لمجابهة طلبات أصحاب الودائع في خزينة البنك ويقرض الباقي.

مثال : نفترض وديعة بمبلغ 1000 دج يحتفظ البنك في خزينته مثلا بمبلغ 200 دج، والباقي يقدمه قرضا اي 800 دج، هذا القرض يتحول إلى وديعة لدى بنك آخر، هذا البنك الأخير يتصرف كالأول أي يحتفظ بنسبة 20% من المبلغ اي 160 دج في الخزينة ويقدم الباقي أي 640 دج كقرض لزبون آخر، وهكذا دواليك فإذا أردنا أن نحسب مجموع الودائع لدى النظام المصرفي

لحصلنا على متوالية هندسية أساسها $r = 80\%$ أما العدد a فيمثل قيمة الوديعة الأساسية وتساوي 1000 دج. ان مجموع الودائع معطى بالدستور التالي :

$$\boxed{S = \frac{a}{1-r}}$$

ومنه نحصل على مضاعف الائتمان

$$S = \frac{1000}{1-0,8} = 5000 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{5000}{1000} = 5$$

النتيجة : ان مضاعف الائتمان يساوي مقلوب نسبة الاحتياطي القانوني.

$$\boxed{K = \frac{1}{r}} \qquad K = \frac{1}{0,2} = S$$

الفقرة الرابعة : مضاعف التجارة الخارجية

هذا المضاعف يشبه إلى حد كبير مضاعف الاستثمار لدى كينز، ويساوي النسبة ما بين التغير في الدخل القومي والتغير في حجم الصادرات.

$$\boxed{K = \frac{\Delta R}{\Delta X} = \frac{1}{s+m}}$$

S : تمثل الميل الحدي للادخار $s = \frac{\Delta s}{\Delta R}$

m : تمثل الميل الحدي للاستيراد $m = \frac{\Delta M}{\Delta R}$

نحن نعلم بأن الاستثمار كالصادرات لها نفس المفعول تعتبر تدفقات، بينما الادخار كالاستيراد يعتبر تسربات.

إن التوازن العام يفترض بأن العرض العام يساوي الطلب العام :

$OG = DG$ أما الطلب العام فيشكل من الطلب على السلع الاستهلاكية زائد الطلب على السلع الانتاجية $DG = C + I$

أما العرض العام فيساوي الانفاق العام والذي يتحول بدوره إلى مداخيل يقوم اصحابها باستخدامها في شراء سلع استهلاكية وما تبقى يدخر

$OG = C + S$

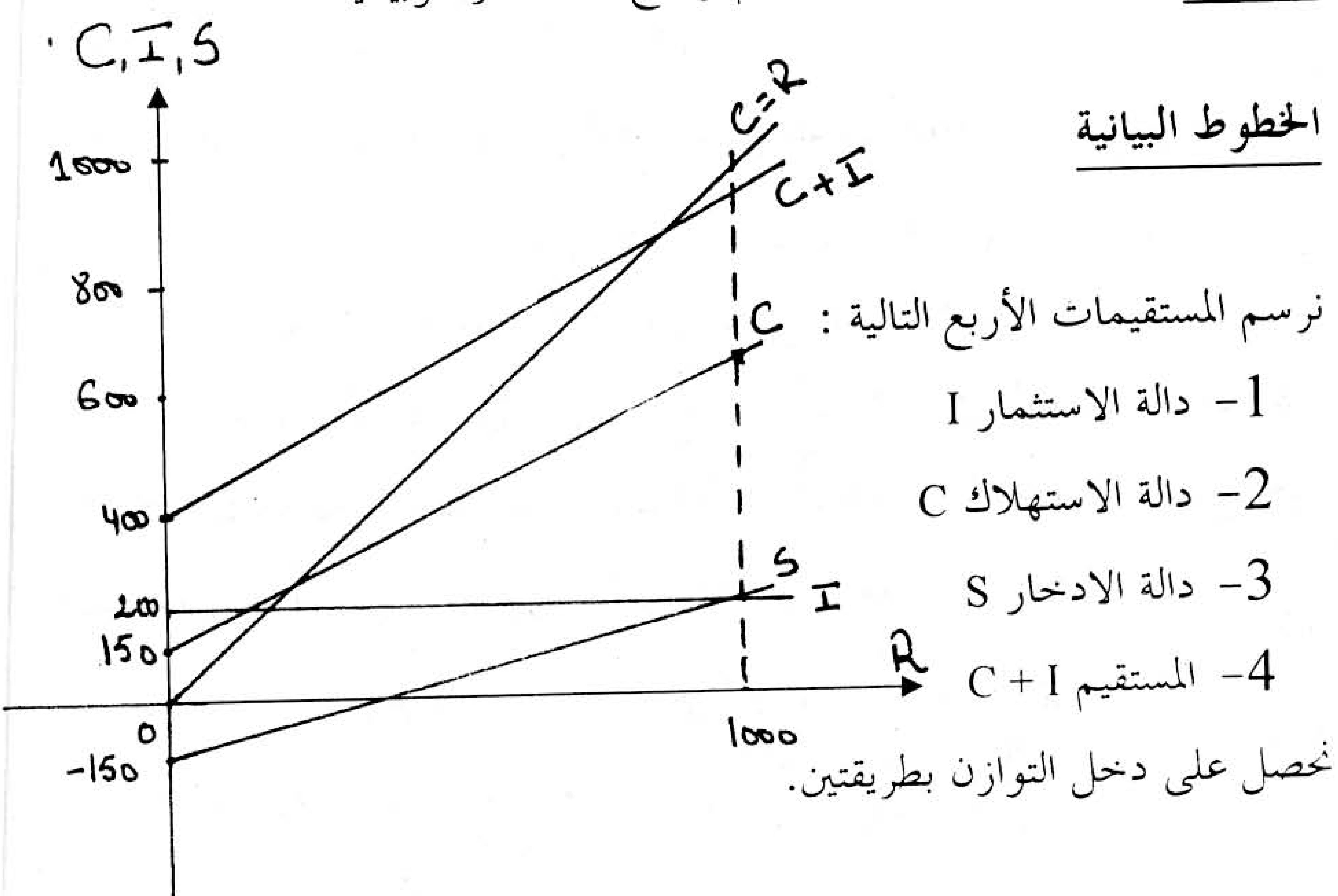
التوازن العام يفترض $C + S = C + I \Rightarrow I = S$

أي أن الادخار يساوي الاستثمار.

تطبيق عملي

لدينا دالة الاستهلاك $C = 0,6R + 150$ ومعدل الاستثمار $I = 250$

السؤال : ما هي شروط التوازن العام وضح ذلك جبريا وبيانيا ؟



الخطوط البيانية

نرسم المستقيمات الأربع التالية :

1- دالة الاستثمار I

2- دالة الاستهلاك C

3- دالة الادخار S

4- المستقيم C + I

نحصل على دخل التوازن بطريقتين.

- عند تلاقي منحنى الادخار والاستثمار.
- عند تلاقي منحنى C + I مع منصف الزاوية.

الحل الجبري

دالة الطلب العام $DG = C + I = 0,6 \quad R + 150 + 250$

$$DG = 0,6 \quad R + 400$$

عندما يتلاقى منحنى $C + I$ مع منصف الزاوية $C = R$ نحصل على دخل التوازن. $R = 0,6R + 400 \Rightarrow 0,4R = 400 \Rightarrow R_e = 1000$

نحصل على دخل التوازن عندما يتلاقى منحنى الادخار مع الاستثمار أي

$$0,4R - 150 = 250 \Rightarrow 0,4R = 400 \Rightarrow R_e = 1000$$

أما في اقتصاد مفتوح على العالم الخارجي فيجب الأخذ بعين الاعتبار الصادارات والواردات. في هذه الحال العرض العام $OG = C + S$

الطلب العام $DG = C + I + (X - M)$

التوزان العام يفترض أن العرض العام يساوي الطلب العام.

$$C + I + X - M = C + S \Rightarrow C + I + X = C + S + M$$

مجموع التدفقات $(I + X) = (S + M)$ مجموع التسربات.

نلاحظ أن المداخيل التي توزع على المساهمين في العملية الانتاجية لها ثلاث استخدامات، قسم منها يستخدم لشراء السلع المحلية (C) وقسم آخر يستخدم لشراء السلع المستوردة (M) والقسم الأخير يدخر (S).

$$R = C + S + M \Rightarrow \Delta R = \Delta C + \Delta S + \Delta M$$

نقسم الكل على ΔR نحصل على : $1 = \frac{\Delta C}{\Delta R} + \frac{\Delta S}{\Delta R} + \frac{\Delta M}{\Delta R}$

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار + الميل الحدي للاستيراد = الواحد.

إذن مضاعف التجارة الخارجية : $K = \frac{1}{1-C} = \frac{1}{s+m}$

مثال 2 : لدينا دالة الاستهلاك $C = 0,5 \quad R + 30$

لدينا الاستثمار $I = 20$ والصادرات $X = 12$ والواردات $M = 15$

السؤال :ما هي شروط التوازن العام ؟ أحسب مضاعف التجارة الخارجية

الحـــــل

في اقتصاد مفتوح على العالم الخارجي الطلب العام يساوي العرض العام $OG = DG$

الطلب العام. $DG = C + I + X - M$

$$R = 0,5R + 30 + 20 + (12 - 15) \Rightarrow R_e = 94$$

إذن مستوى الدخل القومي في حالة التوازن $R_e = 94$

دالة الادخار $S = R - C = 0,5\,R - 30$

شرط التوازن : الادخار = الاستثمار $S = I$

في حالة اقتصاد مفتوح : التسربات تساوي التدفقات $I + X = S + M$

$$0,5R - 30 + 15 = 20 + 12 = 32 \Rightarrow R_e = 94$$

نفترض أن الصادرات ارتفعت من 12 إلى 18 مليون دينار. أحسب الدخل القومي في حالة التوازن وكذلك مضاعف التجارة الخارجية.

التوزان العام يفترض التسربات تساوي التدفقات $I + X = S + M$

$$20 + 18 = 38 = 0,5R - 15 \Rightarrow R_e = 106$$

مضاعف التجارة الخارجية يساوي $K = \frac{\Delta R}{\Delta X} = \frac{106-94}{18-12} = 2$

$$\boxed{K = \frac{1}{s+m}}$$

الفقرة الخامسة : الفائدة والخصم

1- الفائدة البسيطة : عندما يقرض شخص مبلغا من المال إلى شخص آخر يحصل على فائدة لقاء هذه الخدمة اي الوضع تحت تصرف المدين مبلغ من المال. الفائدة هي عبارة عن دخل راس المال.

دستور الفائدة البسيطة

ان الفائدة تتعلق بالفترة الزمنية n بمعد الفائدة t وبالمبلغ المقترض C.

مثال : 1500 دج = C ، $n = 2$ ، $t = \%5$ إذن $\boxed{i = \frac{Ctn}{100}}$

$$i = 150 = \frac{1500 \times 2 \times 5}{100}$$

إذا كانت الفترة الزمنية محسوبة بالشهر فالدستور يصبح كالتالي : $\boxed{i = \frac{Ctn}{1200}}$

إذا كانت الفترة الزمنية محسوبة باليوم فالدستور يصبح كالتالي: $\boxed{i = \frac{Ctn}{36000}}$

تطبيق عملي

مبلغان من المال،وضع المبلغ الأول لمدة ثلاثة اشهر بفائدة سنوية معدلها $t = \%16$ والمبلغ الثاني سبعة اشهر بفائدة سنوية معدلها $t = \%20$.

هذان المبلغان أعطيا نفس الفائدة. اذا زاد المبلغان بمقدار 1500 دينار تصبح نسبة المبلغين $\frac{38}{15}$.

السؤال : أحسب المبلغين والفائدة المشتركة ؟

الحـــل

فائدة المبلغ الأول $i_1 = x.\frac{16}{100}.\frac{3}{12} = \frac{48x}{1200}$

فائدة المبلغ الثاني $i_2 = y.\frac{20}{100}.\frac{7}{12} = \frac{140x}{1200}$

بما أن فائدة المبلغين هي ذاتها يمكن أن نكتب $48x = 140y \Rightarrow 12x = 35y$.

عندما يزيد المبلغان بـــ 1500 دينار نحصل على :

$$\frac{x+1500}{y+1500} = \frac{38}{15} \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} x - \frac{38}{15}y = 2300 \\ 12x - 35y = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{rcases} x = 17500 \\ y = 6000 \end{rcases} \Rightarrow i = 700$$

2– الفائدة المركبة : عندما يودع شخص ما ميلغا من المال لدى البنك بفائدة مركبة فهذا يعني أن الفائدة تضاف إلى راس المال ويمنح عليها فائدة. إذا رمزنا للمبلغ الاصلي C ومعدل الفائدة i تصبح فائدة المبلغ في آخر السنة Ci تضاف إلى المبلغ الاصلي C ونحصل على مبلغ جديد $Ci + C = C_1$

هذا المبلغ الجديد يعطي فائدة قدرها : $C_1 i = (C + C\,i)i$

هذه الفائدة تضاف إلى المبلغ C_1 وتصبح : $C_1 i + C_1 = C_1(1+i)$

نعوض C_1 بقيمتها فنحصل على : $C_2 = C\,(1+i)^2$

وبعد n سنة يصبح المبلغ كالتالي $C_n = C_0\,(1+i)^n$

باستخدام اللوغاريتمات نحصل على : $log\ C_n = logC_o + n\ log\ (1 + i)$

تطبيق عملي

1- أقرض شخص مبلغ 1000 دينار = C لمدة 6 سنوات بفائدة مركبة معدلها 4 % = i .

السؤال :ما هي قيمة المبلغ عند تسديده ؟

الحـــل

نطبق الدستور 1265 دج ≈ $C_n = C_0\ (1+i)^n$

باستخدام اللوغاريتمات $log\ C_n = log^C + n\ log\ (1 + i)$

بعد التعويض نحصل على : $log\ C_n = log\ 1000 + 6\ log\ (1,04i)$

إذن $C_n = 1265DA$

2- وضع مبلغ بفائدة 4%. ما هو الزمن اللازم كي يتضاعف المبلغ 5 مرات ؟

الحـــل

$$C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow \frac{C_n}{C_0} = 5$$

$$5 = (1+i)^n \qquad i = 4\%$$

$$5 = (1,04)^n \Rightarrow n = \frac{\log 5}{\log 1,04} \approx 41$$

الجواب 41 سنة تقريبا.

3- حساب القيمة الحالية لمبلغ يسدد فيما بعد. ننطلق من الدستور

$$C_0 = \boxed{\frac{C_n}{(1+i)^n}} \Leftarrow C_n = C_0(1+i)^n$$

تطبيق عملي

إذا كانت قيمة سند حكومي بعد 10 سنوات تساوي 1000 دج.

ما هي القيمة الحالية للسند علما بأن معدل الفائدة هو 5% ؟

الحـــل

ننطلق من الدستور $C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$

باستخدام اللوغاريتمات نحصل على : $\log C_0 = \log C_n - n\log(1+i)$

بعد التعويض نحصل على : $\log C_0 = 3 - 10\log(1,05)$

من الجداول المالية نستخرج القيمة الحالية للسند وتساوي 614 دج.

4- **الخصم أو الحسم** : في ميدان المعاملات التجارية كالسفتجة والسد لأمر. يلجأ التجار عادة إلى هذه الأوراق التجارية، أما المستفيد فما عليه إلا الانتظار حتى تاريخ الاستحقاق لكي يقضي دينه. أما إذا كان بحاجة ماسة إلى نقود سائلة فما عليه إلا أن يخصم الأوراق التي في حوزته لدى البنك التجاري، ويقدم له هذا الأخير المبلغ مخصوما منه مبلغا ما يشكل الفائدة على المبلغ المستحق. والفارق ما بين الخصم والفائدة هو أن الفائدة تستحق في نهاية فترة الاستحقاق. أما الخصم فيستحق في بادئ

الأمر. إذا رمزنا للقيمة الاسمية للورقة التجارية N والقيمة الحالية V وقيمة الخصم أو الحسم e نحصل على :

$$e = \frac{JtN}{36000}$$ بحيث أن $V = N - e$

J : تمثل عدد الأيام الباقية حتى تاريخ الاستحقاق.

t : تمثل معدل الخصم.

N : القيمة الاسمية للورقة التجارية.

e : يمثل الخصم التجاري.

لكن العذر في هذا الحساب أن البنك يتقاضى الفائدة مقدما على مبلغ يمثل قيمة الورقة التجارية والمنطق يفرض بأن الخصم يجب أن يحسب على القيمة الحالية للورقة التجارية، إلى جانب الخصم التجاري هناك الخصم المنطقي أوالحقيقي

$$e' = \frac{JtN}{Jt + 36000}$$

تطبيق عملي

1- أحسب معدلي الخصم التجاري والمنطقي لورقة تجارية قيمتها الاسمية $N = 17900$ دج. معدل الفائدة %9 = t

عدد الأيام الباقية J = 50.

الحل

الخصم التجاري $e = \frac{JtN}{36000} = \frac{50 \times 9 \times 17900}{36000} = 223{,}75$ DA

الخصم المنطقي $e' = \frac{JtN}{Jt + 36000} = \frac{50 \times 9 \times 17900}{36000 + (9 \times 50)} = 221$ دج

الفارق ما بين الخصمين $e - e' = 2,75$

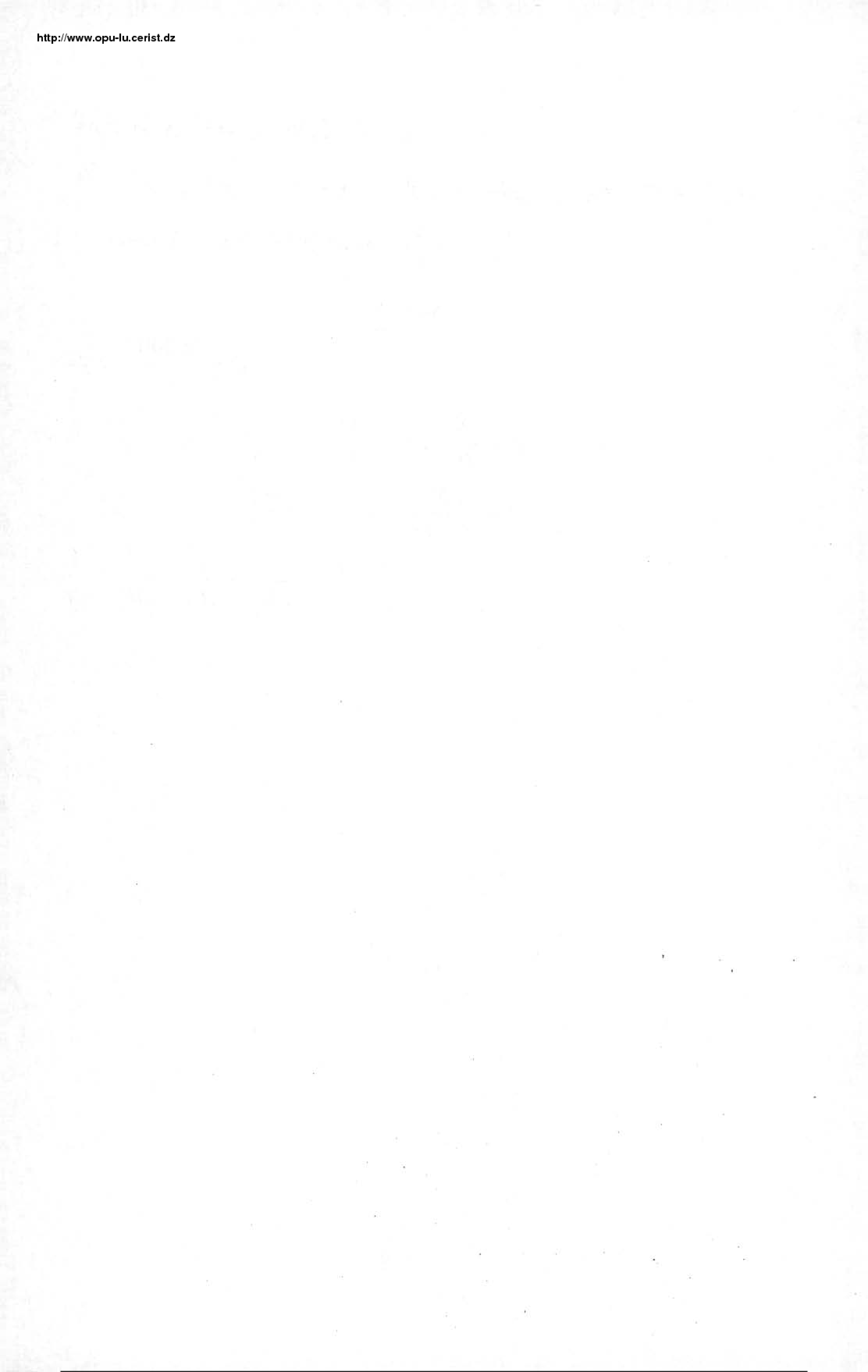
2- برهن على أن الخصم التجاري والمنطقي والقيمة الاسمية للورقة التجارية مرتبطة بالعلاقة التالية : $\frac{1}{e'} - \frac{1}{e} = \frac{1}{N}$

الحـــل

نفترض $D = \frac{36000}{t}$

$$\left.\begin{array}{l} e = \frac{JN}{D} \Rightarrow \frac{1}{e} = \frac{D}{JN} \\ e' = \frac{JN}{J+D} \Rightarrow \frac{1}{e'} = \frac{J+D}{JN} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{e'} - \frac{1}{e} = \frac{J+D}{JN} - \frac{D}{JN} = \frac{J}{JN} = \frac{1}{N}$$



الفصل الحادي عشر

تخفيض العملة La dévaluation

تحديدها : تقوم الدولة بتخفيض العملة لمواجهة العجز في ميزان المدفوعات مما يؤدي إلى خروج العملة الصعبة من البلاد وهذا يؤثر على سعر الصرف، يفترض في تخفيض العملة أننا في نظام سعر الصرف الثابت والذي ساد العالم بعد الحرب العالمية الثانية والذي دام ربع قرن.

مثال

نفترض أن سعر الصرف $1\$ = 10DA$ تقوم الدولة بتخفيض العملة بنسبة 20% عندئذ يصبح سعر الصرف الجديد $1\$ = 12DA$.

إن الهدف من تخفيض العملة هو تشجيع صادرات البلد على أساس أن السلع الوطنية في نظر الأجانب تصبح رخيصة فيزيد الطلب عليها. إذن قيمة الصادرات تزيد، وعلى العكس تنخفض الواردات على أساس أن أسعار السلع المستوردة تصبح مرتفعة في نظر المواطنين فينخفض الطلب عليها وتنخفض قيمة الواردات وبذلك يخف العجز في الميزان التجاري أي الفارق ما بين الصادرات والواردات.

إن العديد من الدول المتخلفة أرادت استخدام هذا السلاح لتقليل العجز في الميزان التجاري وميزان المدفوعات، لكن هذه التجارب فشلت. قام بعض العلماء الاقتصاديين بدراسة هذا الموضوع ووصلوا إلى النتيجة التالية لكي ينجح التخفيض في سد العجز في الميزان التجاري لابد من توفر الشرط التالي :

مجموع مرونة الصادرات + مرونة الواردات > 1.

تطبيق عملي

1- لدينا دولتين فرنسا وأمريكا ولدينا صادرات وواردات هاتين الدولتين بالنسبة للأخرى معطاة بالجدول التالي :

العناصر	فرنسا	أمريكا
الكميات	$q_F = 100u$	$6000u$
الأسعار	$p_F = 750F$	$6\$$
القيم	$75000F$	$36000\$$

نفترض أن سعر الصرف $1\$ = 5FF$.

السؤال 1: أحسب قيمة العجز في الميزان التجاري الفرنسي.

$$déf : X - M$$

مقدار العجز = $déf : 75000 - (36000 \times 5) = -105000FF$

2- تقوم الدولة بتخفيض عملتها بنسبة 20%، يصبح سعر الصرف الجديد $1\$ = 6FF$، لدينا مرونة الصادرات $e_X = \frac{1}{2}$ ومرونة الواردات $e_M = \frac{1}{5}$.

ما أثر هذا التخفيض على الميزان التجاري ؟

بالنسبة لصادرات فرنسا سوف تزيد $e_X = \frac{dx/x}{dp/p}$ لكن dp/p تمثل نسبة التخفيض أي 20% إذن $\frac{dx}{x} = e_X \frac{dp}{p}$

$20\% \times \frac{1}{2} = \frac{dx}{x} = 10\%$ إذن صادرات فرنسا تزيد 10% وتصبح 110 وحدة، قيمة صادرات فرنسا $110 \times 750 = 82500FF$.

أما واردات فرنسا فسوف تنخفض بنفس الطريقة $e_M = \dfrac{dM/M}{dp/p}$

$e_M = \dfrac{1}{5}$ $\quad \dfrac{dp}{p} = 20\%$ إذن $\dfrac{dM}{M} = 20\% \times \dfrac{1}{5} = 4\%$

سوف تستورد فرنسا $6000u - \dfrac{6000 \times 4}{100} = 240$ وحدة أي $5760 = 6000 - 240$ وحدة قيمتها $5760 \times 6 = 34560\$$ وبالفرنك الفرنسي حسب سعر الصرف الجديد $207360F = 6 \times 34560$.

العجز يصبح : $X - M = 207360F - 82500F = 124860F$

<u>النتيجة</u> : أثر تخفيض العملة أدى إلى زيادة حدة العجز في الميزان التجاري إذ ارتفع من $105000F$ إلى $124860F$ والسبب في ذلك هو أن مجموع المرونتين : $e_X + e_M = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} = 0{,}7 \langle 1$.

3- توصلت الدولة إلى تقليص العجز في ميزانها التجاري بنسبة $1/3$، نفترض $e_X = \dfrac{1}{2}$ أحسب قيمة e_M؟

العجز الجديد في الميزان التجاري يصبح $\dfrac{2}{3} \times 105000 = 70000F$، قيمة الصادرات تبقى ذاتها أي 82500 ومنه نستخلص قيمة الواردات

$$M = X + déf = 82500 + 70000 = 152500F$$

وبالدولار $\dfrac{152500}{6} = 25416{,}66\$$، أما الكمية المستوردة $\dfrac{25416{,}66}{6} = 4326$.

إذن التغير في الكمية المستوردة هي $6000 - 4326 = \Delta Q = 1764$

ومنه نستخلص قيمة المرونة $e_M = \frac{dM / M}{dp / p} = \frac{1764 / 6000}{20\%} = \frac{29,4}{20}$

ومنه $\boxed{e_M = 1,47}$

تمرين رقم 2 : لدينا دولتين الجزائر وألمانيا ولدينا الجدول التالي الخاص بصادرات وواردات الدولتين :

العناصر	الجزائر	ألمانيا
الكميات	$10000u$	$5000u$
الأسعار	$10000DA$	2000DM
القيم	$X = 100M$	M = 10M DM

السؤال 1 : أحسب العجز في الميزان التجاري الجزائري علما بأن سعر الصرف هو $1DM = 20DA$.

قيمة صادرات الجزائر $X = p \times q = 10000u \times 10000DA = 100M$ DA

قيمة واردات الجزائر $M = p \times q = 5000 \times 2000 = 10M$ DM

وبالعملة الجزائرية تصبح $10M$ DM $\times 20 = 200M$ DA

إذن العجز في الميزان التجاري الجزائري هو :

$$déf = X - M$$

$$déf = 100M \text{ DA} - 200M \text{ DA} = -100M \text{ DA}$$

2- تقوم الجزائر بتخفيض عملتها بنسبة 40%، يلاحظ أن العجز في الميزان التجاري لم يتغير نفترض أن $e_X = \frac{1}{4}$، أحسب قيمة e_M.

الحل

$$e_X = \frac{dx/x}{dp/p} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{dx}{x} = 40\%\left(\frac{1}{4}\right) = 10\%$$

إذن صادرات الجزائر تزيد بنسبة 10%، قيمتها تصبح 110M DA قيمة واردات الجزائر $M = X +$ العجز $= 110 + 100 = 210M$ DA

بما أن سعر الصرف ينخفض 40% إذن سعر الصرف الجديد يصبح إذن $20 \times 40\% = 8 + 20 = 28DA$.

قيمة واردات الجزائر $\frac{210M \text{ DA}}{28} = 7.50000DM$

الكمية المستوردة الجديدة هي $\frac{7500000}{2000} = 3750$ وحدة

التغير في الكمية المستوردة هي $\frac{dQ}{Q} = \frac{1250}{5000} = 25\%$.

قيمة المرونة $e_M = \frac{25\%}{40\%} = 0,625$

تمرين رقم 3 : يشتري شخص كمية من الدولارات بقيمة $4500FF$، إذا انخفض سعر الصرف $1FF$ الكمية المطلوبة تزيد 50$.

المطلوب : حساب سعر الصرف.

الحل

نفترض x سعر الصرف، الكمية المطلوبة هي $\frac{4500}{x} en\$$، إذا انخفض سعر الصرف $1FF$ أي يصبح $(x-1)$ الكمية المطلوبة.

نحل هذه المعادلة فنحصل $\frac{4500}{x-1}=\frac{4500}{x}+50$

$$50x^2-50x-4500=0$$

جذر هذه المعادلة هو $x=10$ تطبيق عملي :

$$\frac{4500}{(10-1)}=500\$ \qquad \frac{4500}{10}=450\$$$

$$\boxed{500\$=450\$+50\$}$$

تمرين رقم 4 : لدينا دوال العرض والطلب على الواردات والصادرات لدولة ما. نفترض أن سعر الصرف $T=2$.

المطلوب : حساب العجز أو الفائض في الميزان التجاري.

الحل

بالنسبة للواردات :

دالة العرض $P=0{,}65Q+100$

دالة الطلب $P=-0{,}85Q+1000$

بالنسبة للصادرات :

دالة العرض $P=0{,}7Q+800$

دالة الطلب $P=-0{,}9Q+1600$

نعادل العرض مع الطلب بالنسبة للواردات $O=D\Rightarrow$

$1,5Q = 900 \Rightarrow Q_e = 600 \quad P_e = 490$

بالنسبة للصادرات نفس الشيء العرض = الطلب $O = D \Rightarrow$

$1,6Q = 800 \Rightarrow Q_e = 500 \quad P_e = 1150$

قيمة الصادرات $X = P_e Q_e = 1150 \times 500 = 575000$

قيمة الواردات $M = P_e Q_e = 600 \times 490 = 294000$

بالعملة الوطنية $294000 \times 2 = 588000$

إذن العجز في الميزان التجاري $déf = X - M = -13000$.

تمرين رقم 5 : لدينا دولتين أمريكا والجزائر والتبادل التجاري بينهما معطى بالجدول التالي :

العناصر	الجزائر	أمريكا
الكميات	10000	$2000u$
الأسعار	10000	5000$
القيم	$100M$	10M$

نفترض أن سعر الصرف $1\$ = 20DA$.

1- أحسب العجز في الميزان التجاري الجزائري.

$déf = X - M = 100M \text{ DA} - 10M\$ \times 20 = 100M - 200M = -100M \text{ DA}$

2- تريد الجزائر أن تتخلص من هذا العجز بتخفيض عملتها، أحسب معدل التخفيض علما بأن $e_X = e_M = 1$.

نفترض x معدل التخفيض إذن سعر الصرف الجديد هو $T = 20(1+x)$

$$e_X = 1 = \frac{dX / X}{dp / p} \qquad e_M = 1 = \frac{dM / M}{dp / p}$$

بما أن الجزائر خفضت من عملتها بنسبة $x\%$ أي أن صادرات الجزائر ستصبح

$$q_X = 10000(1+x)$$

وقيمة الصادرات تصبح $X = 10^8(1+x) = PQ$

بالنسبة لأمريكا ترتفع الأسعار بنسبة $x\%$ تنخفض الواردات بنفس النسبة على أساس أن قيمة المرونات تساوي الواحد.

تصبح واردات الجزائر $q = 2000(1-x)$

قيمة هذه الواردات $M = qp = 10^7(1-x)$

بالدينار قيمة هذه الواردات $M = 10^7(1-x)(1+x)20$

بما أن العجز في الميزان التجاري $déf(X-M) = 0$

إذن قيمة الصادرات =قيمة الواردات

$$10^8(1+x) = 2 \cdot 10^8(1-x)(1+x)$$

نختصر الطرفين بالمقدار $10^8(1+x)$ فنحصل على :

$$1 = 2(1-x) \Rightarrow 1-x = \frac{1}{2}$$

إذن $\frac{1}{2} = x = 50\%$ إذن مقدار التخفيض 50% للتأكد من صحة الجواب سعر الصرف الجديد يصبح $T = 30DA = 1\$$.

كمية صادرات الجزائر تزيد بنفس نسبة معدل التخفيض 50% وقيمة صادرات الجزائر الجديدة تصبح $X = 150M$ DA، أما بالنسبة للواردات الكميات تنخفض بنفس النسبة 50% على أساس أن $e_M = 1$ تصبح الكمية الجديدة 1000 وحدة وسعر الوحدة 5000\$ قيمتها $5M\$$ وبالدينار

$150M\text{ DA} = 30\times 5M\$$ إذن العجز في الميزان التجاري ينعدم $X - M = 150 - 150 = 0$.

<u>**نفس التمرين السابق**</u> : ونفس المعطيات، لكن نفترض أن $e_X = 1$ ومعدل التخفيض = 50%، أحسب قيمة e_M.

<u>**الحل**</u>

لكي ينعدم العجز في الميزان التجاري يجب أن تتساوى قيمة الصادرات مع قيمة الواردات، إذن قيمة الواردات تساوي $150M\text{ DA}$ بالدولار تصبح $5M\$ = 30 \div 150M\text{ DA}$.

بما أن سعر الوحدة من السلع المستوردة يساوي 5000$ إذن الكمية المستوردة $q_M = \frac{5M\$}{5000\$} = 1000u$.

إذن انخفضت الكمية المستوردة من 2000 إلى 1000 وحدة أي أنها انخفضت بنسبة 50% والأسعار ارتفعت بمقدار التخفيض أي 50% إذن قيمة مرونة الواردات $e_M = \frac{50\%}{50\%} = 1$.

بنفس الطريقة يمكن حساب مرونة الصادرات إذا كان لدينا معدل التخفيض 50% وقيمة الواردات =1، يمكن أن نحسب مرونة الصادرات بنفس الطريقة فنحصل على نفس الجواب $\boxed{e_X = 1}$

تمرين رقم 4: لدينا دولتين أمريكا وفرنسا وسلعتين، أمريكا تشتري 1000 وحدة بسعر F900 للوحدة وفرنسا تشتري 800 وحدة بسعر 200$ للوحدة نفترض أن سعر الصرف FF6= 1$

1- ما هي وضعية الميزان التجاري في بادئ الأمر

2- خفضت فرنسا عملتها بنسبة 50%. نفترض أنه $e_x = e_M = \frac{1}{2}$.

ما هي وضعية الميزان التجاري بعد التخفيض

الحل

1- قيمة صادرات فرنسا هي 1000 x 900= 900.000FF

قيمة واردات فرنسا هي 800 x 200 = 160.000 $

بما أنه سعر الصرف FF6- 1$ إذن قيمة واردات فرنسا هي

160.000 x 6 = 960.000F

العجز في الميزان التجاري الفرنسي هو X-M=-60.000F

	فرنسا	أمريكا
الكمية	1000u	800u
السعر	900F	200$
القيمة	900.000F	160.000$

2- سعر الصرف الجديد هو FF9= 1$ تخفيض بنسبة 50% نفترض

$e_x = e_M = \frac{1}{2}$

بالنسبة لصادرات فرنسا ترتفع بنسبة 25 % = $e_x = \frac{1}{2} = \frac{dx/x}{dp/p}$

..بح صادرات فرنسا 1250 وحدة بعد الزيادة 25%

قيمة صادرات فرنسا FF1125000 = 1250 x 900

بالنسبة لواردات فرنسا تنخفض بنسبة = $e_M = \frac{1}{2} = \frac{dM/M}{dp/p}$

أي نفس النسبة 25% وتصبح كالتالي: 600u=25%-800 قيمتها 600u x 200$= 120000$

وبالفرنك الفرنسي بعد تخفيضه $120000u \times 9 = 1080000FF$ يصبح فائض الميزان التجاري الفرنسي = X – M

فائض $1125000 - 1080000 = 45000FF$

3- احسب قيمة مرونة الواردات لكل يضمحل العجز في الميزان التجاري علما بأن مرونة الصادرات تبقى على حالها $e_x = \frac{1}{2}$

الحل

بالنسبة لصادرات فرنسا تصبح $1.125.000F$ لكي يختفي العجز في الميدان التجاري لا بد أن تصبح قيمة واردات فرنسا نفس الشيء أي $1.125.000F$

وبالدولار بعد تحسينه $\frac{1125000}{9} = 125000\ \$$

بما أن سعر الوحدة هو 200$ إذن الكمية المستوردة هي بعد التخفيض وحدة $q = \frac{125000}{200} = 625$

إذن واردات فرنسا انخفضت من 800 إلى 625 وحدة أي انخفضت الواردات بمقدار 800-625-175 وحدة.

نسبة تخفيض الواردات الفرنسية هي $\frac{175}{800} = 21,875$

أي أن مرونة الواردات تساوي $e_M = \frac{dM/M}{dp/p} = \frac{21,875\%}{50\%} = 43,75\%$

$$e_M = 43,75\%$$

عندئذ يختفي العجز في الميزان التجاري الفرنسي.

تمرين رقم 5: شركة فرنسية تطلب من البنك أن يبيع لها الماركات الألمانية الناجمة عن تصدير السلع إلى ألمانيا، عندما قام العميل بهذه العملية كانت أسعار الصرف كالتالي: 1$=6,5020 - 6,5060FF

قيمة المارك بالدولار 1DM=0,5140 - 0,5160$

قيمة المارك بالفرنك 1DM=3,3500 - 3,3580FF

كما أن تكاليف الصرف تقدر 50FF لكل عملية صرف

المبلغ في الحالة الأولى: نصف مليون مارك، وفي الحالة الثانية 2 مليون مارك.

هل من مصلحة عميل الشركة أن يصرف الماركات بالفرنكات مباشرة أم عن طريق الدولار في الحالتين؟

في الحالة الثانية: نفترض أن وضع الشركة مستوردة بدل من مصدرة، المقادير هي نفسها ½ مليون مارك و2 مليون مارك.

هل من مصلحة الشركة أن يشتري لها العميل الماركات مباشرة أم بطريقة غير مباشرة مرورا بالدولار الأمريكي؟

الحل

أ- الشركة مصدرة:

الحالة الأولى: ½ مليون مارك

بالطريقة المباشرة تحصل الشركة على 1DM=3,35 نطرح منها 50FF عمولة، النتيجة 1.674.950FF عن طريق الدولار نحصل على

1.670.914 F =100F - 1.671014

من مصلحة الشركة الحصول على الفرنكات بطريقة مباشرة.

ب- الشركة تستورد هنا أيضا نميز بين حالتين الطريقة المباشرة وعن طريق الدولار الأمريكي

في هذه الحال تصرف الشركة هو عكس الحالة الأولى عندما كانت مصدرة، فالشركة تريد الحصول على الماركات بأقل قيمة ممكنة نميز ما بين حالتين:

الحالة الأولى: الطريقة المباشرة أي الحصول على الماركات مباشرة فيكلفها

1.679050F = 50F + 1679000F

الحالة الثانية: الطريقة الغير مباشرة عن طريق الدولار تحصل على

1.678548 + 100 (عمولة) = 1678648F

إذن من مصلحة الشركة أن تحصل على الماركات عن طريق الدولار.

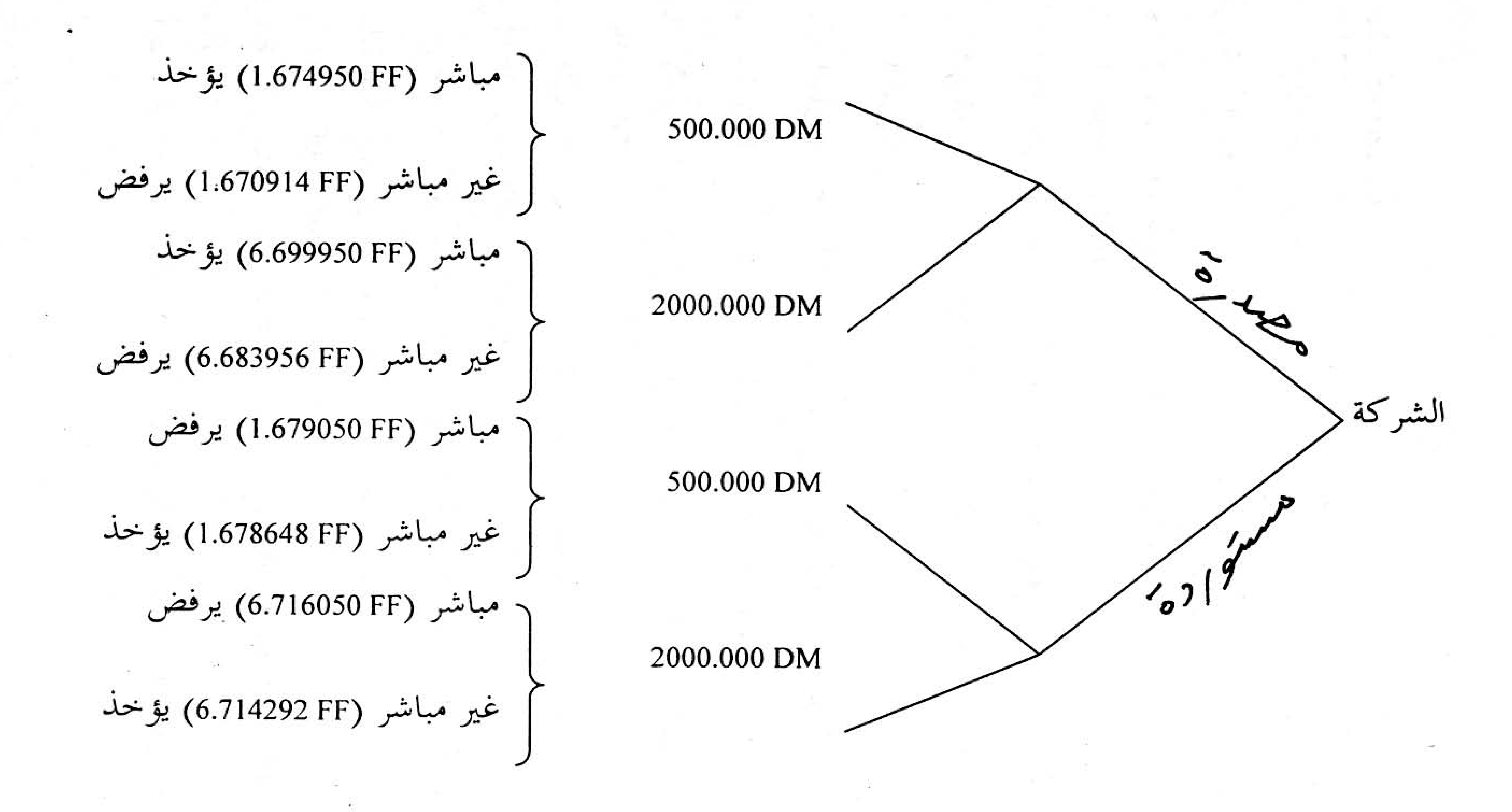
في حالة المبلغ يساوي 2 مليون مارك: الطريقة المباشرة

6716050F = 50F + 6.716000F

الطريقة الغير مباشرة عن طريق الدولار نحصل على 6.714192 + 100 (عمولة) = F 6714292

هنا أيضا نلاحظ بأن الشركة من مصلحتها أن تحصل على الماركات مرورا بالدولار.

يمكن تلخيص هذه الحالة بالمخطط التالي:



الشركة
500.000 DM
2000.000 DM
500.000 DM
2000.000 DM
مباشر (1.674950 FF) يؤخذ
غير مباشر (1.670914 FF) يرفض
مباشر (6.699950 FF) يؤخذ
غير مباشر (6.683956 FF) يرفض
مباشر (1.679050 FF) يرفض
غير مباشر (1.678648 FF) يؤخذ
مباشر (6.716050 FF) يرفض
غير مباشر (6.714292 FF) يؤخذ

تمرين عن التوازن العام

لدينا المعطيات التالية :

$$C = 89 + 0,6y$$
$$I = 120 - 150i$$
$$O = 275 \qquad L_1 = 0,1y \qquad L_2 = 240 - 250i$$

احسب دخل التوازن ومعدل الفائدة

التوازن في سوق السلع IS

$$y = 89 + 0,6y + 120 - 150i \Rightarrow$$
$$\boxed{0,4y + 150i = 209} \qquad IS$$

التوازن في السوق النقدي LM

$$275 = 0,1y + 240 - 250i \Rightarrow$$
$$\boxed{0,1y - 250i = 35} \qquad LM$$

نحصل على دخل التوازن عندما نحل جملة المعادلتين لمجهولين

$$\left\{\begin{matrix} 0,4y + 150i = 209 \\ 0,1y - 250i = 35 \end{matrix}\right\} \Rightarrow i = 6\% \qquad \text{Re} = 500$$

تطبيق حساب الاستثمار C=389 I=111

$$M_1 = 50 \qquad M_2 = 225 \qquad O = 275 = M_1 + M_2$$

نفترض أن الاستثمار المستقل $I_0 = 97$ هبط من 120 إلى 97 ما أثر ذلك على دخل التوازن ومعدل الفائدة

$$y = 89 + 0,6y + 97 - 150i \Rightarrow 0,4y + 150i = 186$$

بالنسبة للسوق النقدي لا يتغير شيء

حل هاتين المعادلتين لمجهولين يعطي

$$\left\{\begin{matrix} 0.1y - 250i = 35 \\ 0,4y + 150i = 186 \end{matrix}\right\} \Rightarrow i = 4\% \qquad \text{Re} = 450$$

<u>النتيجة</u>: عندما ينخفض الاستثمار نلاحظ أن معدل الفائدة ينخفض وكذلك دخل التوازن

بينما لو زادت الكتلة النقدية يؤدي ذلك إلى زيادة الدخل القومي وانخفاض معدل الفائدة.

الفصل الثاني عشر

عمليات البورصة

هناك نوعان من العمليات تجري داخل البورصة :

1- **العمليات العاجلة:** وهي العمليات التي تتم فورا فيجري تسليم الأوراق المالية وقيمة هذه الأوراق خلال فترة لا تتجاوز 48 ساعة إذا ما تم الاتفاق بين المتعاملين عن طريق السماسرة.

2- **العمليات الآجلة:** تتميز هذه العمليات في أن دفع الثمن وتسليم الأوراق المالية لا يتمان لدى عقد الصفقة بل بعد فترة من الزمن تعين مسبقا وتدعى موعد التصفية. هذه العمليات تعتبر المثال الحي لعمليات المضاربة. إن أهم العمليات التي يجري التعامل بها في السوق الآجلة هي:

أ- العمليات الباتة أو القطعية Les opérations fermes

ب- العمليات بشرط التعويض Avec prime

العمليات الباتة أو القطعية:

هي العمليات التي حدد تنفيذها بموعد ثابت يسمى موعد التصفية يلتزم المتعاقدون في هذه العمليات بدفع الثمن وتسليم الأوراق المالية موضوع الصفقة ولا يمكنهم الرجوع عنه، لذلك فالمتعاقدون في البيع والشراء البات معرضون لخسارة غير محددة. نفرق هناك ما بين المضارب الشاري والذي يضارب على

ارتفاع أسعار الأوراق المالية والمضارب البائع الذي يضارب على انخفاض الأسعار فإذا انخفض السعر في البورصة يخسر المضارب الشاري وفي حالة ارتفاع السعر يخسر المضارب البائع. إن المضارب يدخل بصفقات تتناول مبلغا ضخما لذلك فمقدار الخسارة كالربح كبير جدا. مثال

بالنسبة للمضارب الشاري: نفترض متعامل يضارب على ارتفاع أسعار الأوراق المالية يشتري منذ الآن عدد من الأوراق المالية (n) بسعر يحدده الآن A نفترض سعر الورقة يوم التصفية (x). إذن دالة الربح $y_1 = n(x - A)$ فإذا كانت $x\rangle A$ يحقق المضارب الشاري ربحا وفي حالة العكس يخسر.

بالنسبة للمضارب البائع: يبيع منذ الآن عدد من الأوراق المالية (m) بسعر يحدده منذ الآن B، نفترض x سعر الورقة المالية يوم التصفية. إذن مقدار الربح هو $y_2 = m(B - x)$. فإذا كانت $x\langle B$ يربح المضارب البائع وفي حالة العكس يخسر.

العمليات الآجلة بشرط التعويض

هي العمليات التي تخول المتعاملين في سوق البورصة غما بتنفيذ العقد يوم التصفية أو بالاقناع عن تنفيذ العقد لقاء تعويض يعين مقداره مسبقا. هنا أيضا نفرق ما بين المضارب الشاري والمضارب البائع مثال

لدينا مضارب شاري يشتري 100 سهم بسعر 200$ للسهم مع تعويض قدره 10$ للسهم يوم التصفية. لدينا ثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان سعر السهم يوم التصفية يفوق 200$ سوف يقوم المضارب الشاري بشراء الأسهم 200$ ويبيعها فورا بقيمة 250$ للسهم ويحقق ربحا قدره 50$ للسهم وبالنسبة 100 سهم مقدار الربح يكون 5000$.

الحالة الثانية: ينخفض السعر إلى ما دون 200$، نفرق ما بين حالتين" الحالة الأولى سعر السهم أقل من قاعدة التعويض.

قاعدة التعويض=سعر شراء السهم-مقدار التعويض. فإذا كان مقدار التعويض 10$ للسهم و إذا كان سعر السهم يوم التصفية 200-10=190$ وما دون المشتري يفضل دفع التعويض وقدره 100x10=1000$ بدلا من أن يخسر مبلغا كبيرا، لقد أنشئت هذه العمليات الآجلة بشرط التعويض للتخفيف من حدة الخسارة.

أما إذا كان سعر السهم يوم التصفية يتراوح ما بين 190 و200$ يفضل المشتري أن ينفذ العقد لأن خسارته تكون خفيفة مثلا X=$195 إذ يخسر المضارب الشاري 5$ بالسهم و500$ بالصفقة.

بالنسبة للمضارب البائع: يبيع هذا المضارب 100 سهم بسعر 200$ مقدار التعويض 10$ بالسهم هنا أيضا نفرق ما بين ثلاث حالات:

الحالة الأولى: سعر السهم يوم التصفية أقل من 200$ عندئذ يحقق البائع ربحا قدره Y_2=100(180-200)=$2000.

الحالة الثانية: يرتفع سعر السهم و نميز ما بين حالتين:

الأولى: إذا كان سعر السهم يتجاوز 210$ =10+200

فالبائع يفضل دفع التعويض و قدره 100x10=1000$

الثانية: إذا ارتفع السعر و كان ما بين 200$ و210$ للسهم فالبائع يفضل تنفيذ العقد لأن خسارته تكون بسيطة مثلا سعر السهم 205$ إذن مقدار الخسارة $Y_2=100(200-205)=-500\$$

العمليـــــــــات المركبـــــــــة

نقول أننا أمام عملية مركبة إذا كان نفس الشخص يشتري و يبيع نفس الأسهم و تاريخ التصفية يكون موحدا لكافة العمليات من شراء و بيع: باتة أو بسعر التعويض.

مثال: يشتري شخص 200 سهم بسعر 500$ للسهم بات و يبيع 300 سهم بيعا باتا بسعر 400$ للسهم.

السؤال: ما هي محصلة العمليتين:

بالنسبة لعملية الشراء دالة الربح $y_1 = 200(x - 500)$

بالنسبة لعملية البيع دالة الربح $y_2 = 300(400 - x)$

نفك الأقواس فنحصل على $z = 100(200 - x) = 20000 + 100x$

محصلة العمليتين $z = 100(200 - x)$

هي عملية بيع 100 سهم بسعر 200$ فإذا كان السعر يوم التصفية أقل من 200$ يربح المضارب في حالة العكس يخسر.

تطبيق عملي

نفترض سعر السهم يوم التصفية $x = 100\$$

محصلة العمليتين $z = 100(200-100) = +10000\$$

بالنسبة لعملية الشراء: $y_1 = 200(100-500) = -80000\$$

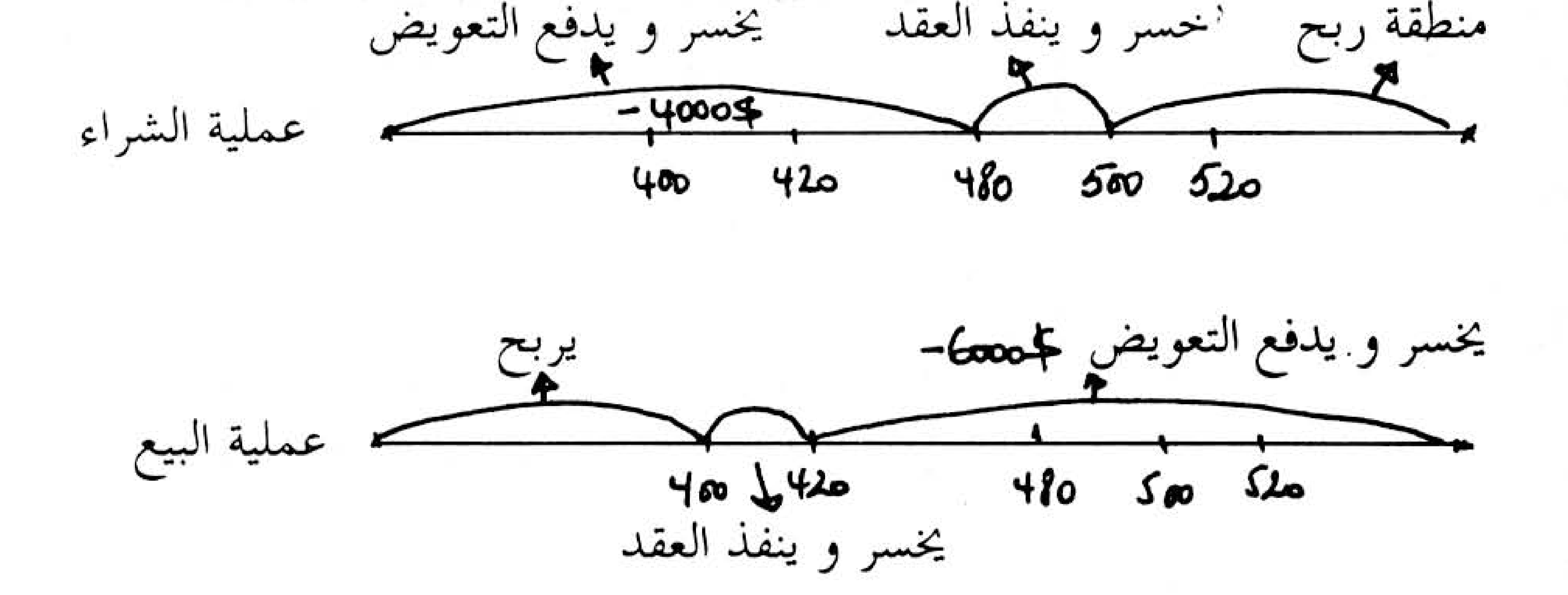
بالنسبة لعملية البيع: $y_2 = 300(400-100) = +90000$

الفرق بينهما $90000 - 80000 = 10000\$$ ربح الشخص.

مثال 2 : يشتري شخص 200 سهم بسعر 500$ للسهم و سعر التعويض 20$ و يبيع 300 سهم بسعر 400$ للسهم

وسعر التعويض 20$ للسهم.

السؤال: ما هي محصلة هاتين العمليتين. بالنسبة للعملية الأولى لدينا المخطط التالي :



نقسم المحصلة إلى ثلاث مناطق :

المنطقة الأولى : $X\langle 420\$$ محصلة العمليتين هي:

$$z = -4000 + 300(400 - x) = 116000 - 300x$$

محصلة العمليتين عبارة عن : $z_1 = 300(386,66 - x)$

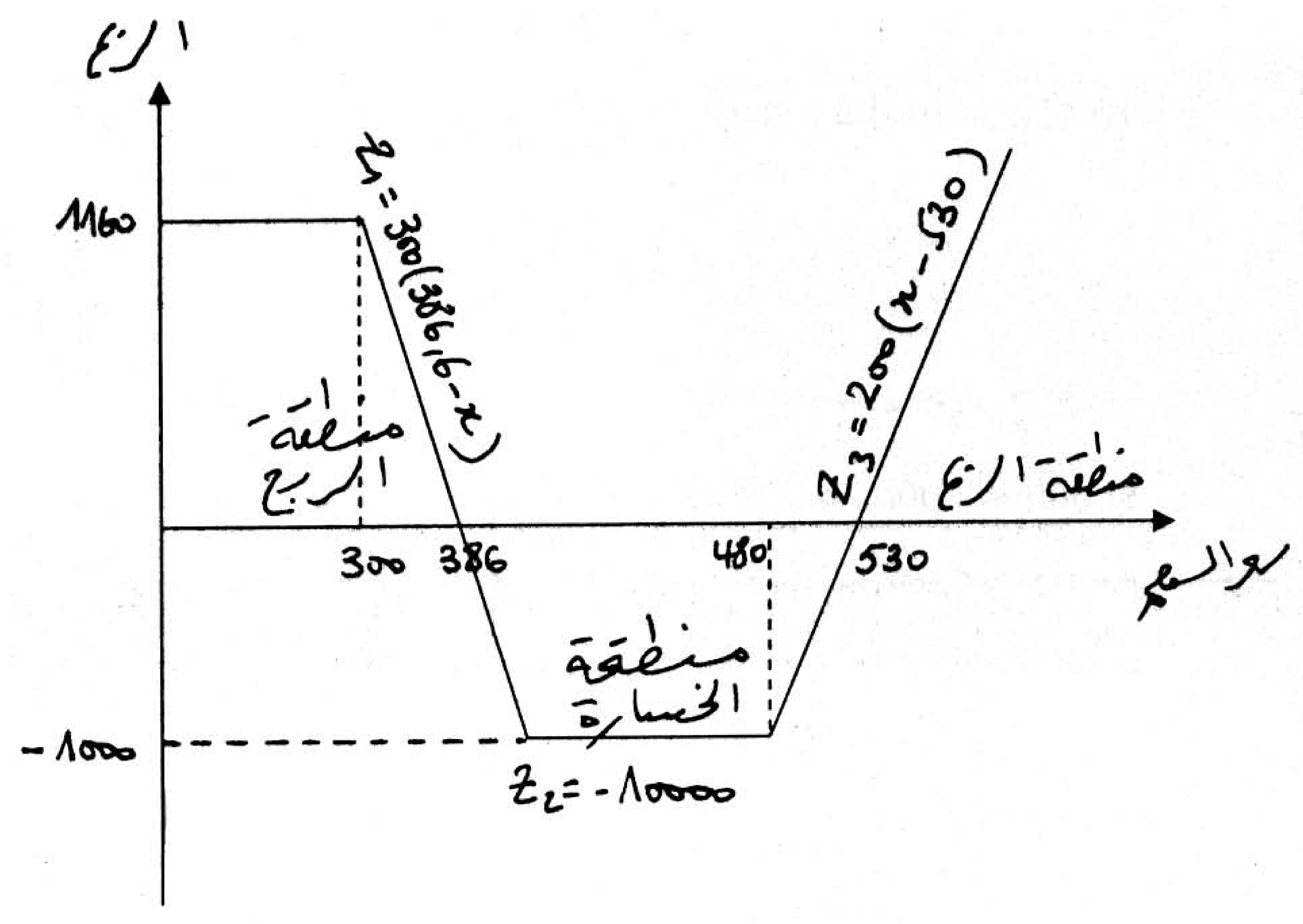
عملية بيع 300 سهم بسعر 386,66 يربح المضارب إذا كان السعر أقل من 386,66 ويخسر في الحالة الأخرى.

المنطقة الثانية : $420\langle X\langle 480$ في هذه الحالة المضارب يخسر $z_2 = -4000 - 6000 = -10000\$$ مهما كان الثمن.

المنطقة الثالثة : $X\rangle 480$

$$z_3 = -6000 + 200(X - 500)$$
$$z_3 = -6000 + 200X - 100.000$$
$$z_3 = 200x + 106000 = 200(x - 530)$$

محصلة العمليتين هي عملية شراء 200 سهم سعر السهم 530$ يربح المضارب إذا كان السعر يفوق 530$ وفي حالة العكس يخسر.



تمرين رقم 3 : يقوم مضارب بالعمليات التالية :

يشتري 200 سهم بسعر 500$ للسهم شراء بات

يبيع 300 سهم بسعر 400$ للسهم بيع بات

يشتري 400 سهم بسعر 400$ بسعر التعويض 20$ للسهم

يبيع 100 سهم بسعر 300$ بسعر التعويض 20$ للسهم

السؤال : ما هي محصلة العمليات الأربع التالية أرسم الخطوط البيانية نبدأ بمحصلة العمليتين الأوليتين :

$$z = y_1 + y_2$$
$$z = 200(x-500)+300(400-x)$$
$$z = 200x-100000+120.000-300x$$
$$z = 20000-100x = 100(200-x)$$

محصلة العمليتين هي عملية بيع باتة سعر السهم 200$ يربح المضارب إذا كان السعر يوم التصفية أقل من 200$ ويخسر في الحالة المعاكسة مثلا إذا كان السعر يوم التصفية 100$ فربح المضارب $z = 100(200-100) = 10000\$$.

بالنسبة لعملية الشراء :

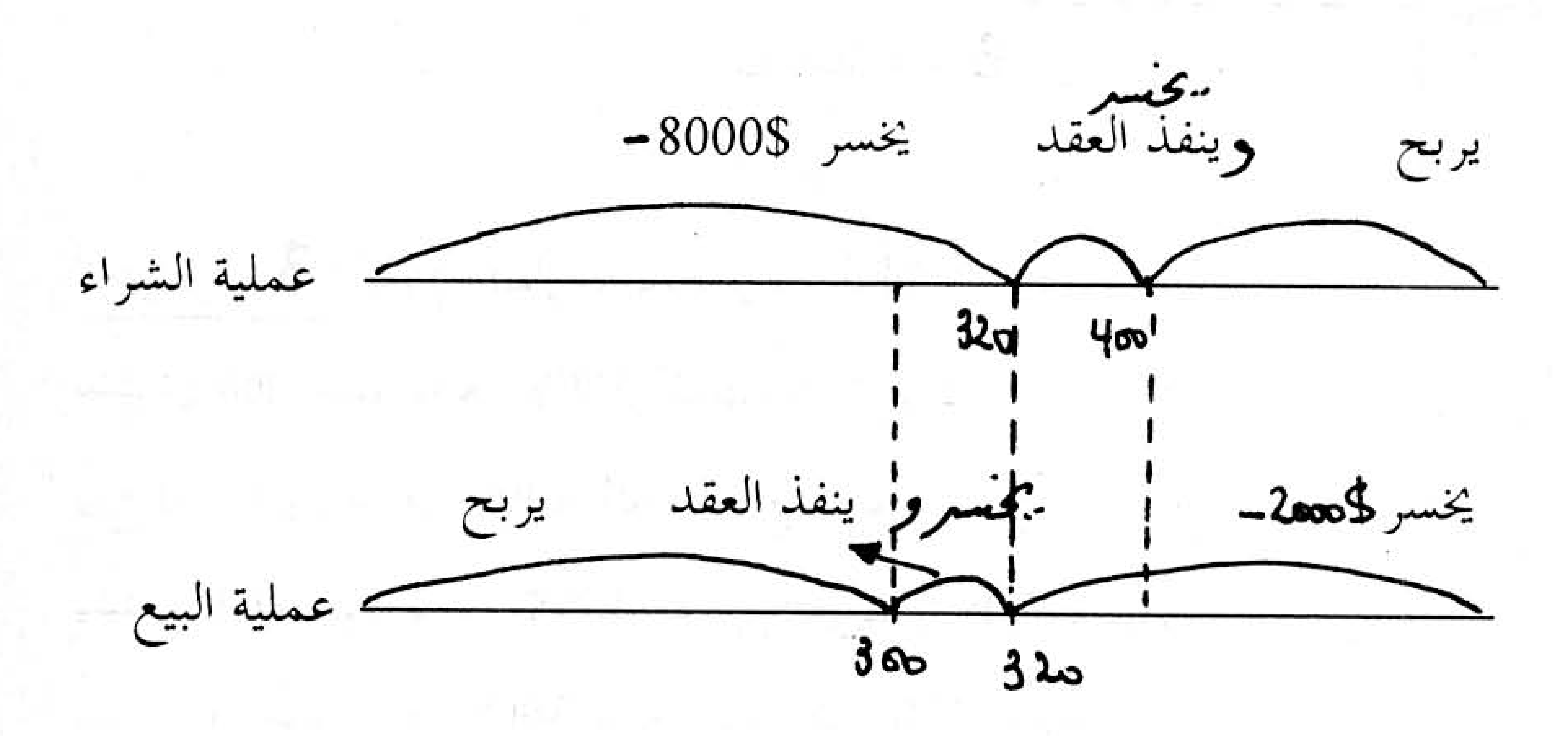
$$y_1 = 200(-400) = -80000$$

بالنسبة لعملية البيع :

$$y_2 = 300(400-100) = 90000$$

محصلة العمليتين هو ربح قدره $90000 - 80000 = 10000DA$

ندرس محصلة العمليتين الأخيرتين والخاصة بعمليات التعويض ونرسم الخطوط البيانية لكل عملية على حدة فنحصل على:



لدينا ثلاث مناطق :

<u>المنطقة الأولى</u> : $X \langle 320$

$$z_1 = -8000 + 100(300 - x)$$

$$z_1 = -8000 + 30000 - 100x$$

$$z_1 = 100(220 - x)$$

محصلة العمليتين هو بيع 100 سهم بسعر 220$ يربح إذا كان السعر أقل من 220 ويخسر في الحالة المعاكسة.

المنطقة الثانية : $320 \langle X \langle 380$

$z_2 = -8000 - 2000 = -10000DA$.

المنطقة الثالثة : $X \rangle 380$

$$z_3 = -2000 + 400(X - 400)$$
$$z_3 = -2000 + 400X - 160000$$
$$z_3 = 400x - 162000 = 400(x - 405)$$

لدينا عملية شراء 400 سهم بسعر 405$ للسهم يربح إذا كان السعر $p \rangle 405$ و يخسر إذا كان $p \langle 405$.

محصلة العمليات الأربع

نأخذ محصلة العمليتين الأوليتين وكذلك محصلة العمليتين الأخيرتين ونحسب محصلة هاتين العمليتين : $z = 100(200 - x)$.

بالنسبة للعمليات مع التعويض لدينا ثلاث مناطق :

$$z_1 = 100(220 - x)$$
$$z_2 = -10000$$
$$z_3 = 400(x - 405)$$

محصلة العمليات الأربع : عبارة عن محصلة المحصلتين فتنقسم بدورها إلى 3 مناطق :

المنطقة الأولى : $X \langle 320$

$$z_1 = 100(200 - x) + 100(220 - x) \Rightarrow z_1 = 200(210 - x)$$

المنطقة الثانية : $320 \langle X \langle 380$

$$z_2 = 100(200 - x) - 10000$$

$$z_2 = 10000 - 100x = 100(100 - x)$$

المنطقة الثالثة : $X \rangle 380$

$$z_3 = 100(200 - x) + 400(x - 405)$$

$$z_3 = 300(x - 473{,}33)$$

نرسم الخطوط البيانية

تطبيق عملي : نفترض أنه يوم التصفية تحدد سعر السهم بالمقدار $x = 200\$$

محصلة العمليات الأربع تكون على الشكل التالي.

بالنسبة لعملية الشراء الباتة : يخسر المضارب مقدار :

$$y_1 = 200(200 - 500) = -60000\$$$

بالنسبة لعملية البيع الباتة :

$$y_2 = 300(400 - 200) = +60000\$$$

محصلة العمليتين يعادل الصفر : $z = y_1 + y_2 = 100(200 - 200) = 0$

بالنسبة لعملية الشراء بسعر التعويض : يخسر مقدار $20\$$ بكل سهم وبـ 400 سهم يخسر $y_1 = -8000\$$.

بالنسبة لعملية البيع بالتعويض :

$$y_2 = 100(300 - 200) = 10000\$$$

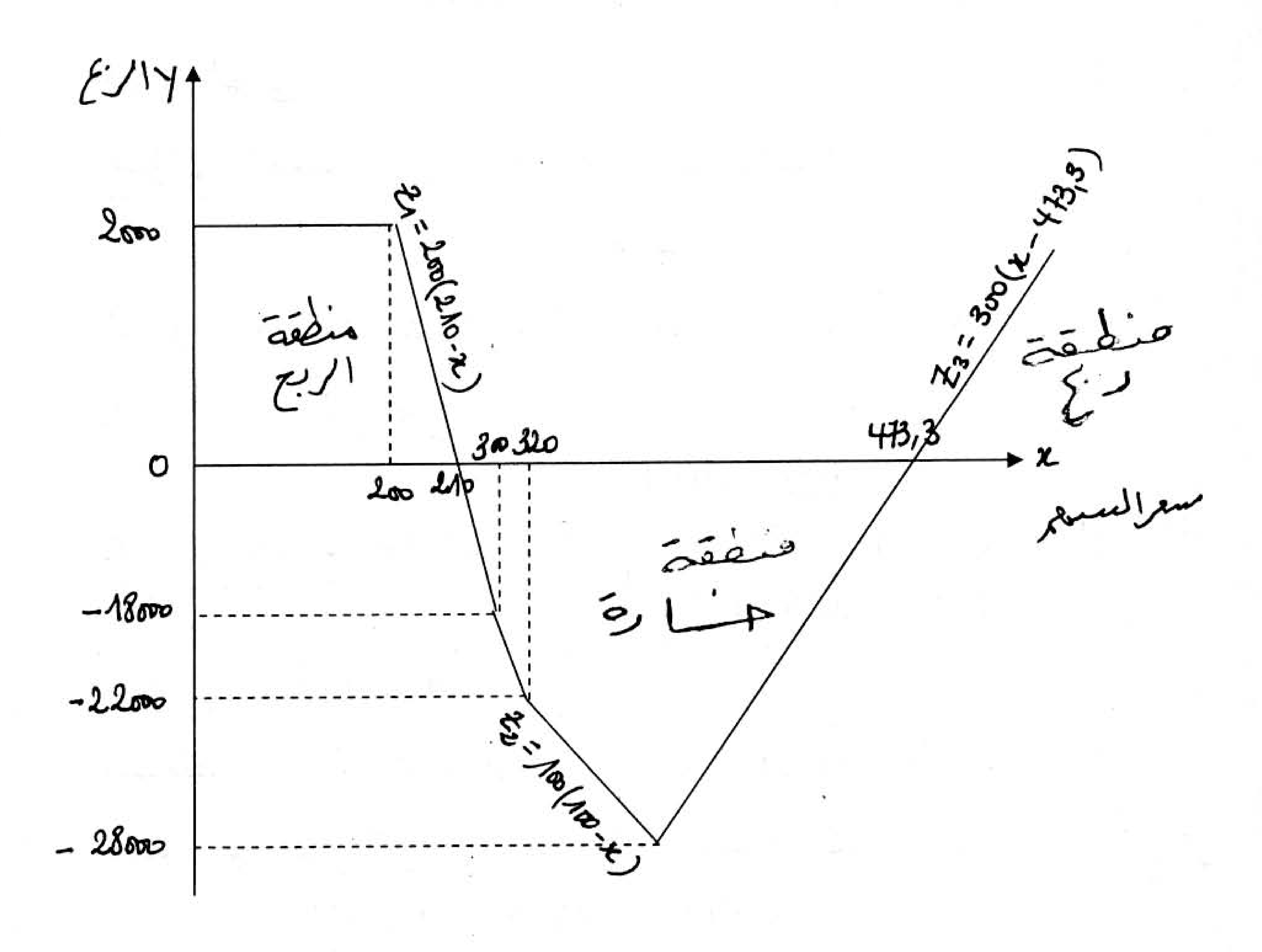
المحصلة هي ربح قدره $2000 = 8000 - 10000$ كما يبين المنحنى نحن بمنطقة ربح. أما إذا كان سعر السهم $300 فنحن في منطقة خسارة قيمتها :

بالنسبة للعمليتين الأوليتين الخسارة هي : $100(200 - 300) = -10000\$$

بالنسبة لعملية شراء بالتعويض الخسارة هي $8000 أي $= 20 \times 400$.

بالنسبة لعملية بيع بالتعويض لا يوجد لا خسارة ولا ربح.

إذن المحصلة للعمليات الأربع هي خسارة $-8000 - 10000 = -18000$



مسائل طرحت في الامتحانات

دورة عام 1980

مسألة رقم 1 : لدينا مصفوفة المعاملات الفنية لثلاث قطاعات.

لدينا ايضا متجه $D = \begin{bmatrix} 128 \\ 400 \\ 150 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 0,09 \\ 0,19 & 0 & 0,14 \\ 0,12 & 0,05 & 0 \end{bmatrix}$

الطلب النهائي

السؤال : أحسب إنتاج كل من القطاعات الثلاث ؟

الحـــل

الشكل العام للمعادلات على شكل مصفوفات هو كالتالي : $X = AX + D$

X : يمثل انتاج كل قطاع.

A : تمثل مصفوفة المعاملات الفنية. $[I-A] = \begin{bmatrix} 1 & -0,02 & -0,09 \\ -0,19 & 1 & -0,14 \\ -0,10 & -0,05 & 1 \end{bmatrix}$

D : يمثل متجه الطلب النهائي.

نستخلص إذن : $D = X(I-A) \Leftarrow X = [I-A]^{-1} D$

نحصل على إنتاج كل قطاع إذا ضربنا المصفوفة المقلوبة بمتجه الطلب النهائي

فنحصل على : $[I-A]^{-1} \begin{bmatrix} 1,014 & 0,025 & 0,095 \\ 0,208 & 1,012 & 0,160 \\ 0,112 & 0,053 & 1,017 \end{bmatrix}$

نحصل على جدول ليونتيف آخذين بعين الاعتبار مصفوفة المعاملات الفنية A والطلب النهائي D وبذلك نتأكد من صحة النتائج التي حصلنا عليها بشأن انتاج القطاعات الثلاث.

$$[I-A]^{-1}.\begin{bmatrix}128\\400\\150\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1=154\\X_2=456\\X_3=188\end{bmatrix}$$

نعيد صياغة جدول ليونتييف

	القطاع الأول	القطاع الثاني	القطاع الثالث	الاستهلاك الوسيط	الطلب النهائي	الانتاج الكلي
الأول	0	9،1	16،9	26	128	154
الثاني	29،3	0	26،3	55،6	400	456
الثالث	15،4	22،8	0	38،2	150	188
القيمة المضافة	109،3	424،1	144،8	678،2	678	↓
الانتاج	154	456	188	→		798

مسألة رقم 2 : يتحمل مشروع نفقة كلية معطاة بالمعادلة :

$$CT=\varphi^3-6\varphi^2+24\varphi$$

السؤال الأول : أحسب النفقة المتوسطة والحدية ؟ أين يتقاطع المنحنيان ؟

السؤال الثاني : نفترض أن المشروع يعمل في ظل المنافسة الحرة، تحدد السعر في السوق $p = 24$. برهن على أن ربح المنتج يمكن أن نعبر عنه إما

بـ $\pi = \int_0^{\varphi}(p - CMa)d\varphi$

أو بـ $\pi = \varphi(p - CMo)$

<u>**السؤال الثالث**</u> : نفترض أن المشروع يعمل في وضع احتكاري. الطلب على السلعة معطى بالمعادلة التالية : $p = 32 - \varphi$

ما هو حجم الانتاج الأفضل الذي يعظم ربح المحتكر ؟ أحسب قيمته ؟

<u>**السؤال الرابع**</u> : أحسب مرونة الطلب السعرية. برهن على أن الايراد الكلي يزيد مع حجم الانتاج إذا كانت المرونة أقل من الواحد الصحيح $e < 1$

<u>**الحـــــل**</u>

دالة النفقة الكلية $CT = \varphi^3 - 6\varphi^2 + 24\varphi$

دالة النفقة المتوسطة $CMo = \varphi^2 - 6\varphi + 24$

دالة النفقة الحدية $CMa = 3\varphi^2 - 12\varphi + 24$

يتقاطع منحنى النفقة الحدية مع منحنى النفقة المتوسطة عندما يمر هذا الأخير بحده الأدنى. رياضيا يعبر عنه بأن نعدم مشتق دالة النفقة المتوسطة

$$(CMo)' = 2\varphi - 6 = 0 \Rightarrow \varphi = 3$$

وبذلك نستخرج قيمة النفقة المتوسطة = النفقة الحدية = 15 في هذه النقطة.

الربح الافرادي = سعر السلعة – النفقة المتوسطة.

الربح الإجمالي = الربح الافرادي × الكمية المنتجة = الايراد الكلي – النفقة الكلية

$$\pi = (24 - \varphi^2 + 6\varphi - 24)\varphi = -\varphi^3 + 6\varphi^2$$

الربح الاجمالي = تكامل دالة الربح الحدي.

$$\pi = \int_0^{\varphi} (-3\varphi^2 + 12\varphi) d\varphi = -\varphi^3 + 6\varphi^2$$

تعظيم دالة الربح يفترض أن نعدم مشتق هذه الدالة.

$$\pi' = -3\varphi^2 + 12\varphi = 0 \Rightarrow \quad \varphi = 0 \ , \ \varphi = 4$$

وهكذا نحصل على قيمة الربح وتساوي $\pi = 32$

يمكن أن نصل إلى نفس النتيجة عندما نعادل النفقة الحدية مع السعر أو الايراد الحدي.

في ظل الاحتكار شرط تعظيم الربح أن نعادل النفقة الحدية مع الايراد الحدي أو نحسب دالة الربح الاجمالي ونعدم هذه الدالة فنصل إلى نفس النتيجة.

$$\pi = \varphi(32 - \varphi - \varphi^2 + 6\varphi - 24) = -\varphi^3 + 5\varphi^2 + 8\varphi$$

$$\pi' = -3\varphi^2 + 10\varphi + 8) = 0 \Rightarrow \varphi = 4$$

فالكمية $\varphi = 4$ تمثل حجم الانتاج الأفضل الذي يعظم دالة الربح.

وبذلك نستخلص كافة العناصر. سعر السلعة = $p= 32 - 4 = 28$

الايراد الكلي = $RT = p \times \varphi = 28 \times 4 = 112$

النفقة الكلية = $CT = 64 - 6 \times 16 + 24 \times 4 = 64$

الربح الاجمالي = $\pi = RT - CT = 112 - 64 = 48$

يمكن التوصل إلى نفس النتيجة عندما نعادل النفقة الحدية مع الايراد الحدي.

دالة الايراد الكلي : $RT = 32\varphi - \varphi^2$

دالة الايراد الحدي : $RMa = 32 - 2\varphi$

النفقة الحدية = الايراد الحدي $32 - 2\varphi = 3\varphi^2 - 12\varphi + 24 \Rightarrow$

$$3\varphi^2 - 10\varphi - 8 = 0 \Rightarrow \varphi = 4 \Rightarrow \pi = 48$$

حساب مرونة الطلب السعرية $p = 32 - \varphi \Rightarrow \varphi = 32 - p$

لدينا معادلة المرونة $\frac{d\varphi}{dp}-1 \quad , \; e=\frac{d\varphi}{dp}\times\frac{p}{\varphi}=-\frac{32-\varphi}{\varphi}$

ان دالة الايراد الكلي تتزايد حسب اشارة دالة الايراد الحدي فإذا كانت موجبة يزيد الانتاج الكلي وإذا كانت سالبة ينقص. وبذلك نحصل على الجدول التالي :

الكمية	0		16		+∞
الايراد الحدي	32	+	0	-	
الايراد الكلي	0	↗	Max 0	↘	

ننطلق من المعادلات التالية :

دالة الايراد الكلي $RT = p\times\varphi$

دالة الايراد الحدي $= RMa = (RT)'$

$$RMa = p+\varphi\frac{dp}{d\varphi}$$

$$RMa > 0 \Rightarrow p > \varphi\frac{dp}{d\varphi}$$

لكي يزيد الايراد الكلي لابد من أن تكون إشارة الايراد الحدي موجبة. نقسم طرفي المتراجحة على الكمية $\left(\varphi\frac{dp}{d\varphi}\right)$

والكمية هذه هي سالبة. إذا قسمنا طرفي المتراجحة على كمية سالبة نغير إشارة المتراجحة لكن هذه الكمية تمثل المرونة $\frac{d\varphi}{dp}\left(\frac{p}{\varphi}\right)$ نصل إلى النتيجة التالية :

يجب أن يكون الطلب غير مرن. $e < 1$

الخطوط البيانية

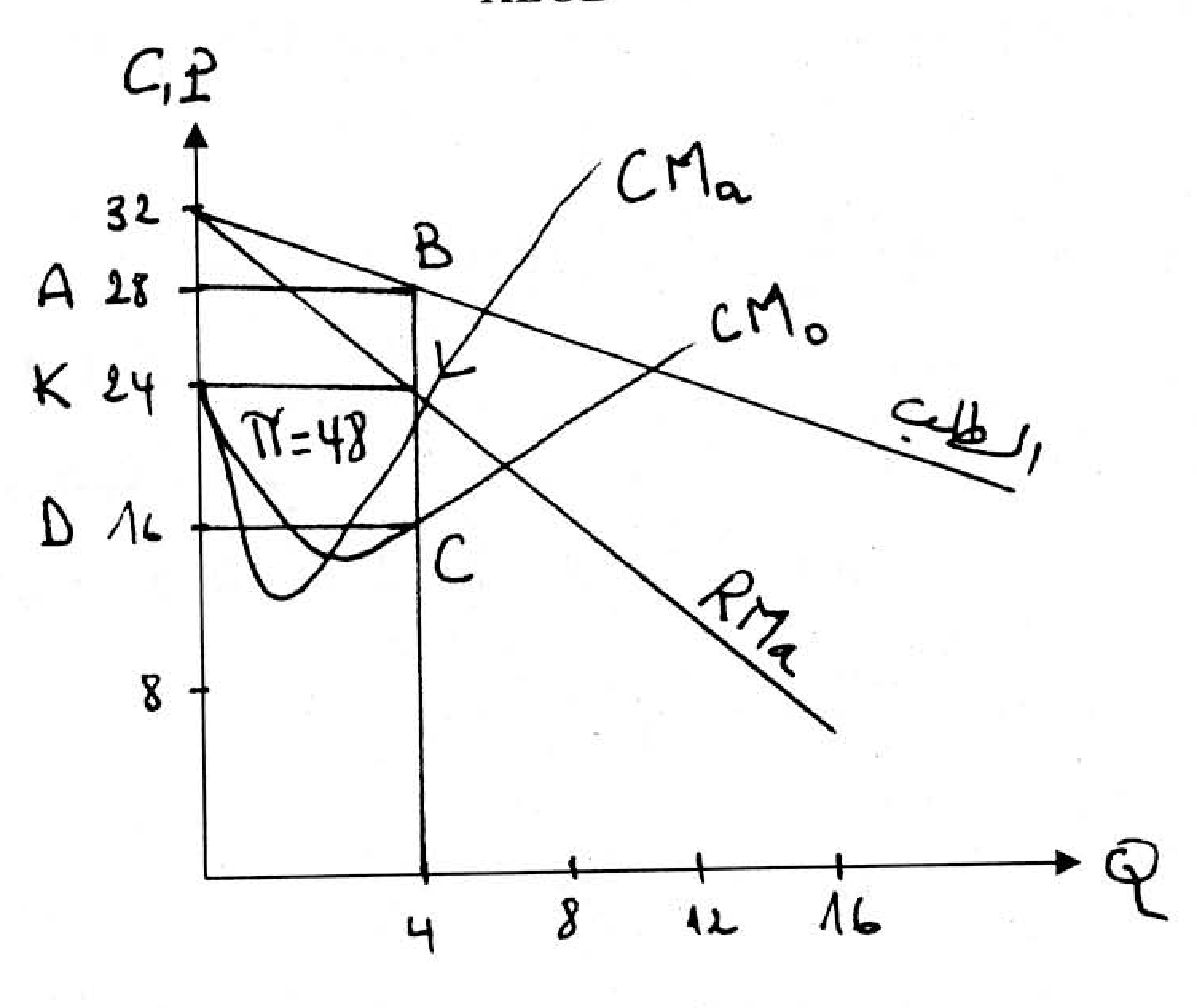
نرسم المنحنيات الأربعة التالية :

منحنى الطلب، منحنى الايراد الحدي.

منحنى النفقة المتوسطة ومنحنى النفقة الحدية.

ربح المحتكر = مساحة المستطيل ABCD = $(28 - 16)\ 4 = 48$ =

في ظل المنافسة الحرة : ربح المنتج = $\frac{8 \times 4 = 32}{KLCD}$ = مساحة المستطيل.



دورة عـــام 1981

مسألة رقم 1 : لدينا دالة الانتاج $\vartheta = 2\sqrt{L.K}$

واسعار عوامل الانتاج $p_L = 9$ $\quad p_K = 4$

1- أحسب كمية العمل وراس المال اللازمين لانتاج الكمية $\vartheta = 100$ ؟

2- ما هو حجم الانتاج الأفضل الموافق لنفقة كلية = $CT = 504$ ؟

3- أحسب النفقة المتوسطة والحدية بدلالة حجم الانتاج ϑ ؟

الحـــل

- نريد أن نبحث عن الحد الأدنى لنفقة انتاج الموافقة لحجم انتاج معين $\vartheta = 100$.

نشكل صيغة لاغرانج $V = 9L + 4K + \lambda(100 - 2\sqrt{LK})$

لتعظيم هذه الدالة نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\frac{\partial V}{\partial L} = 9 - \lambda\left(\frac{K}{L}\right)^{1/2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = 4 - \lambda\left(\frac{L}{K}\right)^{1/2} = 0$$

نشكل النسبة بينهما للتخلص من المعامل λ فنحصل على :

$$\frac{9}{4} = \frac{K}{L} \Rightarrow 9L = 4K$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 100 - 2\sqrt{KL} = 0 \Rightarrow 100 = 2\sqrt{KL}$$

نعوض K بقيمتها فنحصل على : $9L^2 = 10000 = 4KL$

نأخذ الجذر التربيعي فنحصل على :

$$K = 75 \Leftarrow L = \frac{100}{3} \Leftarrow 100 = 3L$$

وهكذا نحصل على قيمة النفقة الكلية $CT = 9L + 4K = 600$

- نفترض أن نفقة الانتاج $= CT = 504$

المطلوب حساب اقصى انتاج ممكن. نشكل صيغة لاغرانج :

$$V = 2\sqrt{KL} + \lambda(504 - 9L - 4K)$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\frac{\partial V}{\partial L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2} - 9\lambda = 0 \Rightarrow 9\lambda = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2} - 4\lambda = 0 \Rightarrow 4\lambda = \left(\frac{K}{K}\right)^{1/2}$$

نشكل النسبة بينهما فنحصل على : $9L = 4K \Leftarrow \frac{K}{L} = \frac{9}{4}$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على :

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 504 - 9L - 4K = 0 \Rightarrow \begin{cases} 504 = 9L + 4K \\ 9L = 4K \end{cases}$$

$$L = 63 \qquad K = 28 \qquad \vartheta = 84$$

- حساب النفقة المتوسطة والحدية بدلالة حجم الانتاج

ننطلق من المعادلات الثلاث التالية :

نعوض K بقيمتها في كل من دالة الانتاج ودالة النفقة الكلية فنحصل على :

$$\begin{cases} \vartheta = 2\sqrt{KL} \\ CT = 9L + 4K \\ 9L = 4K \end{cases}$$

$$CT = 9L + 4L = 18L = 6\vartheta$$

$$\vartheta = 2\sqrt{L\frac{9L}{4}} = 3L \Rightarrow L = \frac{\vartheta}{3}$$

وهكذا نحصل على قيمة كل من :

النفقة المتوسطة : $CMo = \frac{6\vartheta}{\vartheta} = 6$

النفقة الحدية : $CMa = (6\vartheta)' = 6$

ومنها نستنتج أن النفقة المتوسطة = النفقة الحدية = 6.

مسالة رقم 2 : مشروعان يتقاسمان السوق.

دالة الطلب : $p = 400 - 2x$

لدينا نفقات انتاج كل مشروع $CT_1 = 20x_1$, $CT_2 = 2x_2^2$

السؤال :ما هو حجم انتاج كل مشروع لتعظيم الربح في الحالات الثلاث حسب مفهوم كورنو، ستاكلبرغ وبولي ؟

الحـــل

ربح كل مشروع = الفارق ما بين الايراد الكلي والنفقة الكلية.

$$\pi = RT - CT$$

$$\pi_1 = [400 - 2(x_1 + x_2)]x_1 - 20x_1$$
$$\pi_2 = [400 - 2(x_1 + x_2)]x_2 - 2x_2^2$$

A : حسب مفهوم كورنو

كل مشروع يريد تعظيم ربحه بدون أن يأخذ بعين الاعتبار استراتيجية المشروع الآخر. تعظيم دالة ربح كل مشروع يفترض أن نعدم المشتقات الجزئية الأولى.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} &= 380 - 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} &= 400 - 2x_1 - 8x_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 95 - \frac{x_2}{2} \\ x_2 &= 50 - \frac{x_1}{4} \end{aligned}\right.$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على قيمة كل من :

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= 80 \\ x_2 &= 30 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = 110 \\ p &= 180 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \pi_1 &= 12800 \\ \pi_2 &= 3600 \end{aligned}$$

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = 16400$$

الخطوط البيانية

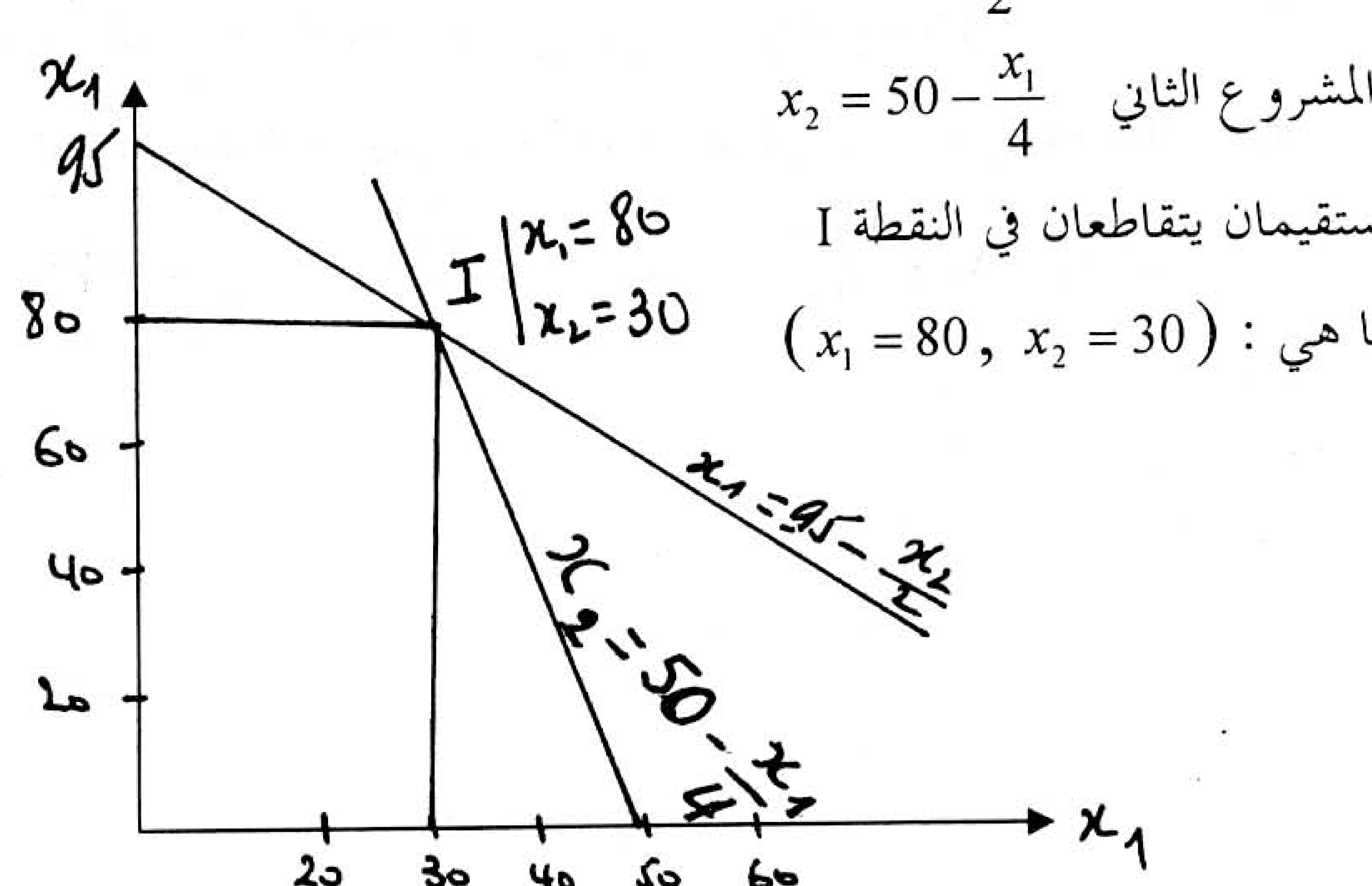
نرسم الخطوط البيانية التالية :

رد فعل المشروع الأول $x_1 = 95 - \frac{x_2}{2}$

رد فعل المشروع الثاني $x_2 = 50 - \frac{x_1}{4}$

هذان المستقيمان يتقاطعان في النقطة I

إحداثياهما هي : $(x_1 = 80,\ x_2 = 30)$



B : حسب مفهوم ستاكلبرغ

يعتقد كل مشروع بأنه مسيطر والآخر تابع له.

الحالة الأولى : المشروع الأول هو المسيطر. يأخذ بعين الاعتبار استراتيجية المشروع الثاني $x_2 = 50 - \frac{x_1}{4}$.

نعوض ذلك في دالة الربح فنحصل على : $\pi_1 = 280x_1 - \frac{3}{2}2x_1^2$

تعظيم هذه الدالة يفترض أن نعدم المشتق $\pi_1' = 280 - 3x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{380}{3}$

$$\pi_1 = 13067 \quad , \quad \pi_2 = 2306 \quad , \quad x_2 = \frac{80}{3} \quad , \quad x = \frac{360}{3} = 120$$

الحالة الثانية : المشروع الثاني هو المسيطر. يأخذ بعين الاعتبار استراتيجية المشروع الأول $x_1 = 95 - \frac{x_2}{2}$

نعوضها بدالة الربح فنحصل على : $\pi_2 = 210x_2 - 3x_2^2$

تعظيم هذه الدالة يفترض أن نعدم المشتق $\pi_1' = 210 - 6x_2 = 0 \Rightarrow$

$$x_2 = 35 \quad , \quad x_1 = \frac{155}{2} \quad , \quad \pi_1 = 12012 \quad , \quad \pi_2 = 3675$$

C : حسب مفهوم بولي

من مصلحة المشروعين أن يتفقا لتعظيم الربح الاجمالي.

$$\pi = 380x_1 + 400x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} &= 380 - 4x_1 - 2x_2 = 0\\ \frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} &= 400 - 2x_1 - 8x_2 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 90 & x_2 = 5\\ \pi_1 = 17100 & \pi_2 = 1000\end{cases}$$

يمكن تلخيص كافة الحالات في الجدول التالي :

الحالات	ربح كل مشروع	ربح المشروعين	الانتاج	السعر
حالة كورنو	12800			
	3600	16400	110	180
حالة ستاركلبرغ الأولى	13067	15873	120	160
	2806			
حالة ستاركلبرغ الثانية	12012	15697	112،5	175
	3675			
حالة بولي الاتفاق	17100	18100	95	210
	1000			
حالة بولي عدم الاتفاق	11511	14077	128،3	143،4
	2566			

دورة عـــام 1981 الاستدراكية

مسالة رقم 1 : لدينا دالة المنفعة الكلية : $u = 4xy - x^2 - 3y^2$

لدينا دخل المستهلك : $R = 45$

لدينا أسعار السلع الافرادية : $p_x = 2$ $p_y = 3$

السؤال : ما هي الكميات الواجب شراؤها من قبل المستهلك للحصول على اقصى منفعة كلية ؟

الحـــل

نريد تعظيم دالة المنفعة الكلية تحت قيد دخل المستهلك.

الطريقة الأولى : طريقة لاغرانج

دالة دخل المستهلك $R = xp_x + yp_y$

بعد التعويض تصبح الدالة $45 = 2x + 3y$

نشكل الصيغة $V = 4xy - x^2 - 3y^2 + \lambda(45 - 2x - 3y)$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4y - 2x - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2y - x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 4x - 6y - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2y + \frac{4}{3}x$$

نشكل النسبة بينهما فنحصل على :

$$\frac{2y - x}{-2y + \frac{4}{3}x} = 1 \Rightarrow 4y = \frac{7}{3}x$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 45 - 2x - 3y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 45 = 2x + 3y \\ 0 = \frac{-7}{3}x + 4y \end{cases}$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على :

كمية السلعة الأولى : $x = 12$ ، كمية السلعة الثانية : $y = 7$

المنفعة = $u = 45$

<u>الطريقة الثانية</u> : طريقة التعويض.

ننطلق من دالة الدخل : $45 = 2x + 3y$

نحسب y بدلالة x اي $y = 15 - \frac{2}{3}x$

نعوض y بقيمتها في دالة المنفعة الكلية فنحصل على :

$$u = 4x(-\frac{2}{3}x + 15) - x^2 - 3(-\frac{2}{3}x + 15)^2 =$$

$$u = -5x^2 + 120x - 675$$

لتعظيم هذه الدالة نعدم المشتق فنحصل على :

$$u' = -10x + 120 = 0 \Rightarrow$$

ومنها نحصل على $x = 12$ ، $y = 7$ ، المنفعة = $u = 45$

<u>مسألة رقم 2</u> : لدينا دالة الانتاج $\vartheta = 4K^{2/3}L^{1/3}$

وأسعار عوامل الانتاج $p_L = 3$ $p_K = 2$

<u>السؤال</u> : أحسب الحد الأدنى للنفقة الكلية الموافقة لحجم الانتاج.

$$\vartheta = 100$$

– أحسب النفقة المتوسطة والحدية بدلالة حجم الانتاج ϑ.

ملاحظة : المقدار $\frac{25}{9} \approx \sqrt[3]{9}$

الحـــل

دالة النفقة الكلية : $CT = 2K + 3L$

نريد أن نقلل من النفقة الكلية تحت قيد حجم الانتاج $\vartheta = 100$.

نستخدم مضاعف لاغرانج. نشكل الصيغة :

$$V = (2K + 3L) + \lambda(100 - 4K^{2/3}L^{1/3})$$

لتعظيم هذه الدالة نعدم المشتقات الجزئية الأولى

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial K} &= 2 - \frac{8}{3}\lambda\left(\frac{L}{K}\right)^{1/3} = 0\\ \frac{\partial V}{\partial L} &= 3 - \frac{4}{3}\lambda\left(\frac{K}{L}\right)^{2/3} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}2 &= \frac{8}{3}\lambda\left(\frac{L}{K}\right)^{1/3}\\ 3 &= \frac{4}{3}\lambda\left(\frac{K}{L}\right)^{2/3}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 100 - 4K^{2/3}L^{1/3} = 0$$

من المعادلتين الأوليتين نشكل النسبة ما بينهما فنحصل على :

$$\frac{2}{3} = 2\left(\frac{L}{K}\right) \Rightarrow \qquad \boxed{K = 3L}$$

من المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$100 = 4K^{2/3}L^{1/3} \Rightarrow K^{2/3}L^{1/3} = 25$$

نرفع هذه المعادلة إلى قوة 3 اي نكعبها. $(25)^3 = K^2L$

نعوض $K = 3L$ فنحصل على : $(25)^3 = 9L^2L = 9L^3 \Rightarrow L = \frac{25}{9}$

حسب الملاحظة $\sqrt[3]{9} = \frac{25}{9}$

إذن $L = 25 \times \frac{9}{25} = 9$ كذلك $K = 3L = 27$

نحسب قيمة النفقة الكلية : $CT = 2K + 3L = 31$

إذن الحد الأدنى للنفقة الكلية الموافق لحجم الانتاج $\vartheta = 100$ هو : $CT = 81$

- حساب النفقة المتوسطة والحدية بدلالة حجم الانتاج.

ننطلق من مجموعة المعادلات التالية : $\vartheta = 4K^{2/3}L^{1/3}$

$$CT = 2K + 3L$$

$$K + 3L$$

نعوض K بقيمتها في كل من دالة النفقة الكلية ودالة الانتاج فنحصل على :

$$\vartheta = 4K^{2/3} \quad L^{1/3} \Rightarrow \vartheta^3 = 4^3 K^2 L = 4^3 \quad 9L^3$$

$$\vartheta^3 = 4^3 L^3.9 \Rightarrow \vartheta = 4L\sqrt[3]{9} = 4L\left(\frac{25}{9}\right) \Rightarrow L = \frac{9\vartheta}{100}$$

نعوض L بقيمتها في دالة النفقة الكلية فنحصل على :

$$CT = 9L = \frac{81\vartheta}{100}$$

وبذلك نحصل على كل من الدوال التالية :

دالة النفقة المتوسطة : $CMo = \frac{CT}{\vartheta} = \frac{81}{100}$

دالة النفقة الحدية : $CMa = (CT)' = \frac{81}{100}$

نلاحظ في هذا المثال بأن النفقة المتوسطة = النفقة الحدية = $\frac{81}{100}$

دورة عـــام 1982

مسألة رقم 1 : لدينا جدول ليونتيف التالي وكذلك الطلب النهائي لكل قطاع، نفترض أن الطلب النهائي يزيد بمقدار 100 بكل قطاع.

السؤال الأول : ما أثر هذه الزيادة على حجم انتاج كل قطاع ؟

السؤال الثاني : اعد صيغة جدول ليونتيف بعد الزيادة ؟

الحـــل

	القطاع الأول	القطاع الثاني	الطلب النهائي	الانتاج
القطاع الأول	200	500	300	1000
القطاع الثاني	400	500	1100	2000
القيمة المضافة	400	1000	1400	↓
الانتاج	1000	2000	⟶	3000

نحسب مصفوفة المعاملات الفنية

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,25 \\ 0,4 & 0,25 \end{bmatrix}$$

نحسب المصفوفة $[I - A]$

$$[I - A] = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,25 \\ -0,4 & 0,75 \end{bmatrix}$$

نحسب كذلك مقلوب هذه المصفوفة $[I - A]^{-1}$

لحساب انتاج كل قطاع نضرب مقلوب المصفوفة بالطلب النهائي فنحصل على

$$X_1 = \frac{3}{2} D_1 + \frac{1}{2} D_2$$

$$X_2 = \frac{4}{5} D_1 + \frac{8}{5} D_2$$

$$[I - A] =^{-1} \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 4/5 & 8/5 \end{bmatrix}$$

إذا زاد الطلب النهائي بكل قطاع بمئة يزيد الانتاج ونحصل على المعاملات التالية :

$$X_1 + \Delta X_1 = \frac{3}{2}(D_1 + 100) + \frac{1}{2}(D_2 + 100)$$

$$X_2 + \Delta X_2 = \frac{4}{5}(D_1 + 100) + \frac{8}{5}(D_2 + 100)$$

وهكذا نحصل على الزيادة في حجم انتاج كل قطاع.

$$\Delta X_1 = 150 + 50 = 200$$

$$\Delta X_2 = 80 + 160 = 240$$

يصبح الانتاج بعد الزيادة كالتالي :

$$X_1 + \Delta X_1 = 1200 \quad , \quad X_2 + \Delta X_2 = 2240$$

يمكن أن نصيغ جدول ليونتيف الجديد آخذين بعين الاعتبار مصفوفة المعاملات الفنية.

	القطاع الأول	القطاع الثاني	الاستهلاك الوسيط	الطلب النهائي	الانتاج
القطاع الأول	240	560	800	400	1200
القطاع الثاني	480	560	1040	1200	2240
القيمة المضافة	480	1120	1600	1600	↓
الانتاج	1200	2240	←		3440

مسألة رقم 2 : بائع جرائد يشتري الجريدة بنصف دينار ويبيعها بدينار. إذا لم تباع يردها ويأخذ 0،20 دج. لاحظ البائع أنه يبيع الجرائد حسب الجدول التالي :

السؤال : ما هي أفضل كمية يشتريها البائع لتعظيم ربحه الوسطي ؟

الحـــــل

نملأ الجدول رقم 1 ثم الجدول رقم 2.

عدد الجرائد	الايام التي بيعت	الاحتمال
0	3	%3
10	17	%17
20	37	%37
30	29	%29
40	12	%12
50	2	%2
مجموع الأيام	**= 100 يوم**	**%100**

جدول رقم 1 :

مبيع / شراء	0	10	20	30	40	50
0	0	0	0	0	0	0
10	-3	5	5	5	5	5
20	-6	0	10	10	10	10
30	-9	-1	7	15	15	15
40	-12	-4	4	12	20	20
50	-15	-7	1	9	17	25

لحساب الربح الوسطي نضرب الكمية المباعة باحتمالها فنحصل على الجدول التالي :

جدول رقم 2 :

النتيجة	حساب الربح الوسطي	الكمية المشتراة
4،76	(5)37%+(5)29%+(5)12%+(5)2% (-3)3%¨+(5)17%	10
8،16	+(10)29%+(10)12%+(10)2% (-6)3%+(2)17%+(10)37%	20
8،60	+(15)29%+(15)12%+(15)2% (-9)3%+(-1)17%+(7)37%	30
6،72	+(12)29%+(20)12%+(20)2% (-12)3%+(4)17%+(4)37%	40
3،88	+(9)29%+(17)12%+(25)2% (-15)3%+(-7)17%+(1)37%	50

<u>**النتيجة**</u> : من هذا الجدول الأخير نستنتج أن أفضل كمية يشتريها البائع لتعظيم ربحه الوسطي هي الكمية 30 جريدة لنه يقابلها ربح وسطي قدره 8،60 دج.

دورة عـــــام 1982 الاستدراكية

مسألة رقم 1 : لدينا دالة المنفعة الكلية : $u = 2xy$

واسعار السلع الافرادية : $p_y = 1$, $p_x = 2$

لدينا دخل المستهلك : $R = 10$

- احسب الكميات x و y التي يجب أن يشتريها المستهلك لتعظيم منفعته الكلية ؟ أحسب قيمة المنفعة الكلية ؟
- نفترض ان سعر السلعة الثانية تغير واصبح $p_y = 2$ ، ما هو الحد الأدنى لدخل المستهلك لكي يحصل على نفس المنفعة الكلية كما وجدها في السؤال الأول ؟

الحـــل

1- نحسب دالة الدخل : $R = xp_x + yp_y$

بعد التعويض نحصل على : $10 = 2x + y$

نريد تعظيم دالة المنفعة الكلية تحت قيد الدخل. هناك طريقتان لحل هذه المسالة :

الطريقة الأولى : طريقة التعويض.

ننطلق من دالة الدخل ونحسب y بدلالة x فنحصل على $y = 10 - 2x$ نعوض ذلك بدالة المنفعة الكلية $u = 2xy = 2x(10 - 2x) = 20x - 4x^2$

نشتق هذه الدالة ونعدم المشتق من أجل تعظيم دالة المنفعة الكلية فنحصل على :

$$u' = -8x + 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

نعوض x بقيمتها فنحصل على قيمة y ، $y = 10 - 2\left(\frac{5}{2}\right) = 5$

أما قيمة المنفعة الكلية فتساوي : $u = 2xy = 2(5)\left(\frac{5}{2}\right) = 25$

<u>الطريقة الثانية</u> : طريقة لاغرانج.

نريد تعظيم دالة المنفعة الكلية تحت قيد الدخل.

نشكل الصيغة التالية :

$$V = 2xy + \lambda(10 - 2x - y)$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\vartheta V}{\vartheta x} &= 2y - 2\lambda = 0 \Rightarrow \\ \frac{\vartheta V}{\vartheta y} &= 2x - \lambda = 0 \Rightarrow \end{aligned}\right\} \lambda = y = 2x$$

$$\frac{\vartheta V}{\vartheta \lambda} = 10 - 2x - y = 0 \Rightarrow y + 2x = 10$$

$$4x = 10 \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = 5 \end{cases}$$

نعوض y بقيمتها فنحصل على :

$$u = 25$$

2- نفترض ان سعر السلعة الثانية تغير واصبح كالتالي : $p_y = 2$

دالة الدخل الجديدة : $R = 2x + 2y$

لدينا دالة المنفعة الكلية : $u = 2xy$

نفترض $u = 25$ إذن $y = \frac{25}{2x}$

نعوض ذلك في دالة الدخل فنحصل على : $R = 2x + \frac{25}{x}$

نريد تعظيم هذه الدالة : يجب أن نعدم مشتق هذه الدالة فنحصل على :

$$R' = 2 - \frac{25}{x^2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{25}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{25}{2}$$

$$x = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{25}{2x} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = y$$

طريقة لاغرانج.

نريد تقليل دالة الدخل تحت قيد المنفعة الكلية. نشكل الصيغة التالية :

$$V = 2x + 2y + \lambda(25 - 2xy)$$

تعظيم هذه الدالة يفترض أن نعدم المشتقات الجزئية الأولى :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\vartheta V}{\vartheta x} &= 2 - 2\lambda y = 0 \Rightarrow \\ \frac{\vartheta V}{\vartheta y} &= 2 - 2\lambda x = 0 \Rightarrow \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\lambda y = \lambda x \Rightarrow \\ &x = y \end{aligned}$$

$$\frac{\vartheta V}{\vartheta \lambda} = 25 - 2xy = 0 \Rightarrow 25 = 2xy$$

وهكذا نحصل على قيمة الدخل $\Rightarrow$ $25 = 2x^2 = 2y^2$

$$x = y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$R = 2x + 2y = 2\left(\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \qquad 14\,,14$$

مسألة رقم 2 : ينتج مشروع سلعة. دالة المنفعة الكلية :

$$CT = \frac{x^3}{10} - 3x^2 + 50x + 400$$

- احسب النفقة المتوسطة والحدية. اين يتقاطع المنحنيان ؟
- هذا المشروع في وضع احتكاري يواجه طلبا معادلته : $p = 87,5 - 2x$

أحسب الايراد الكلي والحدي ؟

- ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟
- اكتشف هذا المشروع سوقا جديدة دالة الطلب هي : $p = 65 - \frac{x}{2}$

أحسب حجم الانتاج في كل من السوقين كي يعظم ربحه ؟

أحسب قيمة الربح لكل من السوقين ؟

الحـــــل

- دالة النفقة المتوسطة : $CMo = \frac{x^2}{10} - 3x + 50$

دالة النفقة الحدية : $CMa = \frac{3 \times x^2}{10} - 6x + 50$

يتقاطع المنحنيان عندما يمر منحنى النفقة المتوسطة بحده الأدنى فنحصل على :

$$(CMo)' = \frac{x}{5} - 3 = 0 \Rightarrow x = 15$$

قيمة النفقة المتوسطة تساوي النفقة الحدية تساوي :

$$CMo = CMo = 27,5$$

دالة الايراد الكلي : $RT = 87,5x - 2x^2$

دالة الايراد الحدي : $RMa = 87,5 - 4x$

شرط تعظيم الربح : الايراد الحدي = النفقة الحدية.

$$87,5-4x=0,3x^2-6x+50 \Rightarrow x=15$$

دالة الربح = $\pi = RT - CT = 862,5 - 812,5 = 50$

دالة الربح = $\pi = -\frac{x^3}{10} + x^2 + 37,5x - 400$

نعدم المشتق فنحصل على : $\pi' = -\frac{3x^2}{10} + 2x + 37,5 = 0 \Rightarrow x = 15$

قيمة الايراد الكلي = $RT = 862,5$

قيمة النفقة الكلية = $CT = 812,5$

إذن الربح الاجمالي = $\pi = RT - CT = 862,5 - 812,5 = 50$

- في حال وجود سوقين نتحدث عن الاحتكار المميز. دالة الطلب العام = مجموع الطلبين.

دالة الطلب في السوق الأولى : $p_1 = 87,5 - 2x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(87,5 - p_1)$

دالة الطلب في السوق الثانية : $p_2 = 65 - \frac{x_2}{2} \Rightarrow x_2 = 130 - 2p_2$

دالة الطلب العام : $x = \frac{347,5}{2} - \frac{5}{2}p \Rightarrow p = \frac{2}{5}(347,5 - x)$

دالة الايراد الكلي : $RT = -\frac{2}{5}x^2 + 69,5x$

دالة الايراد الحدي : $RMa = -\frac{4}{5}x + 69,5$

شرط تعظيم الربح : الايراد الحدي = النفقة الحدية.

$$-\frac{4x}{5} + 69,5 = 0,3x^2 - 6x + 50 \Rightarrow$$

حجم الانتاج الأفضل = $x = 20,5$

قيمة النفقة الحدية = $CMa = 53$

نقارن النفقة الحدية مع الايراد الحدي في كل سوق.

دالة الطلب في السوق الأولى : $p = 87{,}5 - 2x$

دالة الايراد الكلي : $RT = 87{,}5x - 2x^2$

دالة الايراد الحدي : $RMa = 87{,}5x - 4x$

نقارن الايراد الحدي مع النفقة الحدية : $87{,}5 - 4x = 53 \Rightarrow x_1 = 8{,}5$

دالة الطلب في السوق الثانية : $p = 65 - \frac{x}{2}$

دالة الايراد الكلي : $RT = 65x - \frac{x^2}{2}$

دالة الايراد الحدي : $RMa = 65 - x$

نقارن الايراد الحدي مع النفقة الحدية : $65 - x = 53 \Rightarrow x_2 = 12$

السعر في السوق الأولى : $p_1 = 87{,}5 - 2(8{,}5) = 70{,}5$

السعر في السوق الثانية : $p_2 = 65 - \frac{1}{2}(12) = 59$

قيمة النفقة المتوسطة : $CMo = 50$

الربح في السوق الأولى : $\pi_1 = x_1(p_1 - CMo) = 174$

الربح في السوق الثانية : $\pi_2 = x_2(p_2 - CMo) = 108$

الربح في السوقين : $\pi = \pi_1 + \pi_2 = 282$

دورة عام 1983

مسألة رقم 1 : لدينا دالة الانتاج $\vartheta = 10L^{\alpha}K^{\beta}$

- نفترض $\alpha = \dfrac{1}{4}$ كما أن حجم الانتاج يتضاعف 8 مرات عندما تتضاعف عوامل الانتاج 16 مرة. أحسب قيمة β ؟
- نفترض ميزانية المشروع $B = 300.000$ واسعار عوامل الانتاج الافرادية $p_L = 10$ ، $p_K = 20$. ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟
- استنتج سعر السلعة ؟

الحـــــل

- لحساب قيمة β نستفيد من احدى خواص الدوال المتجانسة. إذا كانت لدينا دالة متجانسة من الدرجة k وإذا ضربنا عوامل الانتاج بعدد ثابت $t = 16$ فإن حجم الانتاج سوف يتضاعف $8 = t^k$ مرة.

حسب عناصر المسألة $\beta = \dfrac{1}{2}$ ؛ $8 = 16^k \Rightarrow k = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{4}$

- شرط تعظيم الربح : $\dfrac{\text{الانتاجية الحدية للعمل}}{\text{الانتاجية الحدية لرأس المال}} = \dfrac{\text{سعر عنصر العمل}}{\text{سعر عنصر راس المال}}$

لذلك لابد أن نحسب الانتاجية الحدية لكل من العمل وراس المال ونحسب النسبة بينهما.

الانتاجية الحدية للعمل $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial L} = 2,5L^{-3/4}K^{1/2}$

الانتاجية الحدية لراس المال $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial K} = 5L^{1/4}K^{-1/2}$

نشكل النسبة بينهما ونقارن ذلك باسعار عوامل الانتاج فنحصل على :

$$\frac{2,5L^{-3/4}K^{1/2}}{5L^{1/4}K^{-1/2}}=\frac{10}{20}\Rightarrow\frac{K}{2L}=\frac{1}{2}\Rightarrow K=L$$

الربح الاجمالي : الايراد الكلي – النفقة الكلية.

دالة النفقة الكلية $CT = Lp_L + Kp_K = 300.000$

حسب قانون أولير لدينا المعادلات التالية الخاصة بتجانس الدوال.

$$K\frac{\partial\vartheta}{\partial K}+L\frac{\partial\vartheta}{\partial L}=k\vartheta$$

نضرب طرفي المعادلة بسعر السلعة فنحصل على :

$$kP\vartheta=K\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial K}\right)P+L\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial L}\right)P=\frac{3}{4}P\vartheta$$

شرط تعظيم الربح : الانتاجية الحدية القيمية لكل عامل انتاج تساوي كلفة هذا العامل اي السعر الافرادي.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial K}\right)P=P_K\\[2ex]\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial L}\right)P=P_L\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{3}{4}P\vartheta=KP_K+LP_L$$

الطرف الثاني من المعادلة يمثل النفقة الكلية أو ميزانية المشروع :

$$\frac{3}{4}RT=300.000\Rightarrow$$

ومنه نستنتج أن الايراد الكلي للمشروع = $RT = 400.000$

ربح المشروع = $\pi = RT - CT = 100.000$

حساب سعر السلعة :

نعطلق من المعادلة التالية : $K = L$

نعوض ذلك في دالة النفقة الكلية.

$$Lp_L + Kp_K = 300.000 = L(p_L + p_K)$$

$$L = \frac{300.000}{p_L + p_K} = \frac{300.000}{10+20} = 10.000$$

إذن $K = L = 10.000$

ومنها نستخلص حجم الانتاج $\vartheta = (10^4)^{3/4}.10 = 10.000$ $10.^{4}(10^4) = \vartheta$

$$\vartheta = K^{1/2}L^{1/4} = 10.000$$

لحساب سعر السلعة : نقسم الايراد الكلي على حجم الانتاج فنحصل على :

$$RT = P \times \vartheta \Rightarrow p = \frac{RT}{\vartheta} = \frac{400.000}{10.000} = 40$$

سعر السلعة : $\boxed{p = 40}$

مسألة رقم 2 : لدينا دالة المنفعة الكلية : $u = x^{1/2}.y^{1/4}$

- احسب قيمة المنفعة الكلية في النقطة A إحداثياتها هي : $(x=4 \ , y=1)$
- أحسب تزايد المنفعة الكلية عندما تزيد الكمية من السلعة الأولى بوحدة واحدة $\Delta x = 1$ قارن النتيجة مع المنفعة الحدية ؟
- أحسب المعدل الحدي للاحلال وأحسب قيمته في النقطة A ؟
- نفترض اسعار السلع الافرادية $p_y = 2$ ، $p_x = 1$ لدينا دخل المستهلك : $R = 10$. ما هي الكميات x و y الواجب شراؤها لتعظيم قيمة المنفعة الكلية. أحسب قيمتها ؟
- نفترض أن الدخل تغير. احسب قيمة الكميات x و y بدلالة الدخل R. أحسب قيمتها عندما $R = 10$ ، $R = 12$ ؟

الحـــــل

- قيمة المنفعة الكلية في النقطة A : $u_A(4,1) = 4^{1/2}.1^{1/4}$

إذن قيمة المنفعة الكلية في النقطة A تساوي 2.

- عندما تتزايد الكمية x بوحدة واحدة أن في النقطة B إحداثياتها : $(y = 1,\ x = 5)$

نجد أن قيمة المنفعة الكلية = $u_B(5,1) = 5^{1/2}.1^{1/4} = \sqrt{5}$

إذن المنفعة الكلية تزيد : $\sqrt{5} - 2 = 0,236$

نحسب المنفعة الحدية بالنسبة للعنصر x لذلك لابد أن نحسب المشتق الجزئي لدالة المنفعة الكلية ونحسب قيمتها في النقطة A

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} x^{-1/2} . y^{1/4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} (4)^{-1/2} (1)^{1/4} = \frac{1}{4} = 0,250$$

نلاحظ أن القيمتين متقاربتين : $0,236 \approx 0,250$

- المعدل الحدي للاحلال = $\dfrac{x \text{ المنفعة الحدية}}{y \text{ المنفعة الحدية}}$

نحسب المنفعة الحدية لكل سلعة

بالنسبة للسلعة الأولى $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{2} x^{-1/2} . y^{1/4}$

بالنسبة للسلعة الثانية $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{4} x^{1/2} y^{-3/4}$

نشكل النسبة بينهما فنحصل على المعدل الحدي للاحلال $T = 2\left(\dfrac{y}{x}\right)$

نعوض x و y بقيمتها فنحصل على : $T = \dfrac{1}{2}$

- نريد تعظيم دالة المنفعة الكلية تحت قيد الدخل.

دالة الدخل $10 = x + 2y$

شكل الصيغة $V = x^{1/2}.y^{1/4} + \lambda(10 - x - 2y)$

شرط تعظيم دالة المنفعة الكلية أن نعدم المشتقات الجزئية الأولى :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{1}{2}x^{-1/2}.y^{1/4} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{1}{2}x^{1/2}.y^{-3/4} - 2\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

نشكل النسبة بينهما للتخلص من المعامل فنحصل على :

$$\frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/4}}{\frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 10 - x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4y \\ 10 = x + 2y \end{cases}$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على : $\begin{cases} y = 5/3 \\ x = 20/3 \end{cases}$

- نفترض أن الدخل متغير. نحسب x و y بدلالة R

نبطلق من المعدلات التالية : $\left.\begin{cases} R = x + 2y \\ x = 4y \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$$R = 6y \Rightarrow y = \frac{R}{6}, x = \frac{2R}{3}$$

إذا افترضنا قيمة $R = 12$ نحصل على : $(y = 2 \quad , \ x = 8)$

إذا افترضنا $R = 10$ نحصل على $(y = 5/3, x = 20/3)$

دورة عام 1983 الاستداركية

مسألة رقم 1 : لدينا دالة الطلب $p = k\varphi^{2/3}$

بحيث أن k تمثل عددا ثابتا p تمثل سعر السلعة φ تمثل الكمية المطلوبة.

حدد قيمة الثابت k في النقطة A إحداثياهما $(p = 4 \ , \ \varphi = 8000)$

- يتحمل مشروع نفقة كلية $CT = 0,6\varphi + 10000$
- أحسب حجم الانتاج الأقصى الذي يعظم ربح المحتكر ؟

الحــــل

- لتحديد قيمة الثابت نعوض p و φ بقيمها فنحصل على :

$$4 = k(8000)^{2/3} \Rightarrow k = 10^{-2}$$

- شرط تعظيم الربح في وضع الاحتكار أن نعادل النفقة الحدية مع الايراد الحدي.

دالة النفقة الحدية : $CMa = 0,6$

دالة الايراد الكلي : $RT = 10^{-2}\varphi^{5/3}$

دالة الايراد الحدي : $RMa = \dfrac{5}{300}\varphi^{2/3}$

النفقة الحدية = الايراد الحدي $\Leftarrow \dfrac{5}{300}\varphi^{2/3} = 0,6 = \dfrac{3}{5}$

حجم الانتاج الأفضل = $\varphi = 216$

- دالة الربح : $\pi = RT - CT = \dfrac{1}{300}\varphi^{5/3} - 10^4 - 0,6\varphi$

نشتق دالة الربح ونعدمها فنحصل على : $\pi' = \dfrac{5}{300}\varphi^{2/3} - 0,6 = 0 \Rightarrow$

$$\varphi = 216$$

نحسب المشتق الثاني. π''

$$\pi'' = \frac{1}{90}\varphi^{-1/3} = \frac{1}{90\varphi^3}$$

نأخذ القيم الموجبة للكمية فنجد أن إشارة المشتق الثاني هي موجبة. إذن نحن أمام حد أدنى.

نحسب قيمة الربح ونعوض $\varphi = 216$ بدالة الربح فنحصل على :

$$\pi = \frac{1}{100}(216)^{5/3} - 10^4 - 0{,}6(216) \approx -10052$$

نلاحظ في هذه الحال أن المشروع خاسر. قيمة الخسارة تمثل حدا أدنى.

<u>مسألة رقم 2</u> : يحتكر مشروع انتاج سلعة يبيعها في سوقين مخلفين.

دالة الطلب :

في السوق الأولى : $\varphi_1 = 12 - \frac{1}{4}p_1$

في السوق الثانية : $\varphi_2 = 12 - \frac{3}{20}p_2$

لدينا دالة النفقة الكلية : $CT = \varphi^2 + 4\varphi + 100$

1- ما هي الكميات التي يجب أن ينتجها المشروع في كل من السوقين لتعظيم ربحه. أحسب قيمة الربح ؟

2- ايهما أفضل للمشروع : الاحتكار العادي أم الاحتكار المميز ؟ أحسب قيمة الربح في كلتا الحالتين ؟

الحـــل

دالة الطلب العام تساوي مجموع دالتي الطلبين. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

$$\varphi = 24 - \frac{2}{20} p \Rightarrow p = 60 - \frac{5}{2}\varphi$$

نحسب الايراد الكلي : $RT = p \times \varphi = 60\varphi - \frac{5}{2}\varphi^2$

نحسب الايراد الحدي : $RMa = 60 - 5\varphi$

نحسب النفقة الحدية : $CMa = 2\varphi + 4$

شرط تعظيم الربح يفترض أن نعادل النفقة الحدية مع الايراد الحدي

فنحصل على : $60 - 5\varphi = 2\varphi + 4 \Rightarrow \varphi = 8$

حجم الانتاج الأفضل = $\varphi = 8$

قيمة النفقة الحدية = $CMa : 2(8) + 4 = 20$

سعر السلعة = $p = 60 - \frac{5}{20}(8) = 40$

دالة الربح في حال الاحتكار العادي : $\pi = RT - CT = \varphi^2 + 4\varphi + 100$

نعوض $\varphi = 8$ فنحصل على قيمة الربح = $\pi = 124$

أما في حالة الاحتكار المميز نحسب قيمة الربح في كل من السوقين فنحصل

على في السوق الأولى دالة الطلب : $p_1 = 48 - 4\varphi_1$

الايراد الكلي : $RT_1 = 48\varphi_1 - 4\varphi_1^2$

الايراد الحدي : $RMa_1 = 48 - 8\varphi_1$

شرط تعظيم الربح أن نقارن الايراد الحدي مع النفقة الحدية

فنحصل على : $48 - 8\varphi_1 = 20 \Rightarrow \varphi_1 = 3,5$

سعر السلعة = $\frac{5}{20}p_1 = 12 - 3,5 \Rightarrow p_1 = 34$

أما في السوق الثانية فلدينا العناصر التالية :

دالة الطلب $p_2 = 80 - \frac{20}{3}\varphi_2$

دالة الايراد الكلي $RT_2 = 80\varphi - \frac{20}{3}\varphi_2^2$

دالة الايراد الحدي $RMa_2 = 80 - \frac{40}{3}\varphi_2$

شرط تعظيم الربح أن نعادل الايراد الحدي مع النفقة الحدية.

حجم الانتاج الأفضل = $80 - \frac{4}{3}\varphi_2 = 20 \Rightarrow \varphi_2 = 4,5$

لو جمعنا ما ينتجه المشروع في السوقين لحصلنا على نفس حجم الانتاج في الاحتكار العادي اي 8 = 4،5 + 3،5.

نحسب سعر السلعة $p_2 = 80 - \frac{20}{3}(4,5) \Rightarrow p_2 = 50$

لحساب الربح لكل من السوقين لابد من حساب النفقة المتوسطة.

دالة النفقة المتوسطة $CMo = \frac{CT}{\varphi} = \varphi + 4 + \frac{100}{\varphi}$

قيمة النفقة المتوسطة $CMo = 12 + \frac{100}{8} = 24,5$

دالة الربح الاجمالي = $\pi = \varphi(p - CMo)$

بحيث أن φ تمثل حجم الانتاج p تمثل سعر السلعة، CMo تمثل النفقة المتوسطة.

الربح في السوق الأولى : $\pi = \varphi_1(p_1 - CMo)$

قيمة الربح في السوق الأولى : $33,25 = \pi_1 = 3,5(34 - 24,5)$

دالة الربح في السوق الثانية : $\pi_2 = \varphi_2(p_2 - CMo)$

قيمة الربح في السوق الثانية : $114,75 = \pi_2 = 4,5(50 - 24,5)$

قيمة الربح في السوقين : $\pi = \pi_1 + \pi_2 = 148$

يمكن أن نقارن ربح المحتكر العادي مع ربح المحتكر المميز :

$148 > 124$

النتيجة : من مصلحة المحتكر أن يميز في سعر السلعة. يفترض ذلك وجود سوقين مختلفين يتميزان بمرونة مختلفة وبذلك يستطيع المنتج ان يزيد من أرباحه.

دورة عام 1984

مسألة رقم 1 : يتكون اقتصاد دولة من 3 قطاعات :

A : القطاع الزراعي : يشتري من قطاع الصناعة 120 ومن الخدمات 60. الطلب النهائي = 80، الانتاج الكلي لهذا القطاع = 300.

B : القطاع الصناعي : يشتري هذا القطاع من الزراعة 160 ومن الخدمات 400. الطلب النهائي = 440، الانتاج الكلي = 800.

C : قطاع الخدمات : يشتري هذا القطاع من الزراعة 60 ومن الصناعة 240. الطلب النهائي = 140، الانتاج الكلي = 600.

- أرسم جدول ليونتيف وأحسب مصفوفة المعاملات الفنية ؟
- ما هو حجم انتاج كل قطاع فيما لو زاد الطلب النهائي في القطاع الزراعي 10 وفي الصناعة 40 وفي الخدمات 20 ؟

الحـــــل

جدول ليونتيف

	الزراعة	الصناعة	الخدمات	الاستهلاك الوسيط	الطلب النهائي	الانتاج
الزراعة	-	160	60	220	80	300
الصناعة	120	-	240	360	440	800
الخدمات	60	400	-	460	140 ↓	600
القيمة المضافة	120	240	300	←	660	↓
الانتاج	300	800	600			1700

نلاحظ أن مجموع الطلب النهائي = مجموع القيمة المضافة = 660.

نحسب مصفوفة المعاملات الفنية

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A$$

ثم نحسب المصفوفة

$$[I - A] = \begin{bmatrix} 1 & -0,2 & -0,1 \\ 0,4 & 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \qquad [I - A]$$

نحسب محدد هذه المصفوفة لمعرفة ما إذا كانت نظامية أم لا فنحصل على $\Delta = \frac{2}{3}$

نحسب مقلوب المصفوفة

$$[I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1,205 & 0,377 & 0,271 \\ 0,723 & 1,476 & 0,663 \\ 0,602 & 0,813 & 1,386 \end{bmatrix}$$

نكتب المعادلات التالية :

$$X = [I - A]^{-1}.D \Rightarrow \Delta X = [I - A]^{-1} \Delta D$$

ΔD تمثل الزيادة في الطلب النهائي

$$\Delta D = \begin{bmatrix} 10 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$$

وهكذا نحصل على الزيادة في انتاج كل قطاع.

$$\begin{cases} X_A = 331,5 \\ X_B = 879,5 \\ X_C = 666,2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \Delta X_A = 12,05 + 14,06 + 5,42 = 31,5 \\ \Delta X_B = 7,23 + 59,04 + 13,16 = 79,5 \\ \Delta X_C = 6,02 + 32,52 + 27,72 = 66,2 \end{cases}$$

نعيد صياغة جدول ليونتيف بعد هذه الزيادة

	الزراعة	الصناعة	الخدمات	الاستهلاك الوسيط	الطلب النهائي	الانتاج
الزراعة	-	176	66،6	242،6	90	332،6
الصناعة	132،6	-	266،4	399	480	879
الخدمات	66،3	439،7	-	506	160	666
القيمة المضافة	133،7	263،3	333		730	↓
الانتاج	332،6	879	666	←		1877،6

مسألة رقم 2 : لدينا دالة الانتاج $\vartheta^2 = 20KL - 15K^2 - 4L^2$

وأسعار عوامل الانتاج $p_L = 10$ $\quad$ $p_K = 25$

لدينا ميزانية المشروع $B = 4500$

- ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته ؟
- أحسب النفقة المتوسطة والحدية بدلالة حجم الانتاج ؟

الحـــــل

- دالة النفقة الكلية $CT = 10L + 25K$

لتعظيم دالة الانتاج تحت قيد النفقة الكلّية نشكل صيغة لاغرانج :

$$V = 20KL - 15K^2 - 4L^2 + \lambda(4500 - 25K - 10L)$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى لتعظيم هذه الدالة.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial V}{\partial K}=\dfrac{20L-30K}{2\sqrt{\vartheta}}+25\lambda=0\\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial L}=\dfrac{20K-8L}{2\sqrt{\vartheta}}+10\lambda=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}25\lambda=\dfrac{30K-20L}{2\sqrt{\vartheta}}\\[2mm] 10\lambda=\dfrac{8L-20K}{2\sqrt{\vartheta}}\end{array}$$

نشكل النسبة ما بينهما للتخلص من المعامل λ فنحصل على :

$$\frac{20L-30K}{20K-8L}=\frac{25}{10}\Rightarrow L=2K$$

وهكذا نحصل على $\boxed{L=2K}$ $\qquad \dfrac{\partial V}{\partial \lambda}=10L+25K-4500=0$

نعوض L بقيمتها في الدالة الأخيرة فنحصل على: $45K=4500$

$L=200$ ، $K=100$ ، حجم الانتاج $\vartheta=300$

– لحساب النفقة المتوسطة والحدية بدلالة ϑ ننطلق من المعادلات الثلاث.

نعوض L بقيمتها في كل من دالة الانتاج ودالة النفقة الكلية فنحصل على : نعوض ذلك في دالة النفقة الكلية فنحصل على :

$$\begin{cases} L=2K \\ CT=25K+10L \\ \vartheta^2=20KL-15K^2-4L^2 \end{cases}$$

وهكذا نحصل على قيمة كل من دالة النفقة المتوسطة والحدية

$$\begin{cases} CT=25K+20K=45K \\ \vartheta^2=40K^2-15K^2-16K^2=9K^2\Rightarrow CMo=15 \\ \left.\begin{array}{l}\vartheta=3K\\ K=\dfrac{\vartheta}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow CT=45K=15\vartheta \quad CMa=15\end{cases}$$

دالة النفقة المتوسطة = $CMo=15$

دالة النفقة الحدية = $CMa=15$

$$\left.\begin{array}{l} CMo = \dfrac{CT}{\vartheta} = 15 \\ CMa = (CT)' = 15 \end{array}\right\} \qquad CMo = CMa = 15$$

دورة عام 1985

مسألة رقم 1 : يتكون اقتصاد دولة من قطاعين : الزراعة والصناعة.

لدينا المعلومات التالية معطاة بالجدول التالي :

- أكمل هذا الجدول واستخرج مصفوفة المعاملات الفنية ؟
- يعتقد المسؤولون بأن الطلب على القطاع الصناعي سوف يتضاعف مرتين. وفي القطاع الزراعي يزيد بنسبة 20%. أحسب انتاج كل قطاع ؟ أعد صياغة الجدول من جديد ؟

	الزراعة	الصناعة	الاستهلاك الوسيط	الطلب النهائي	الانتاج
الزراعة	250	250	500	500	1000
الصناعة	300	400	700	300	1000
القيمة المضافة	450	350	←	800	↓
الانتاج	1000	1000	←		2000

الحـــل

- نملأ الجدول ونحسب مصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 \\ 0,30 & 0,40 \end{bmatrix}$

المعاملات الفنية A

- نحسب المصفوفة $[I - A]$

- نحسب مقلوب هذه المصفوفة $[I - A]$ $I - A = \begin{bmatrix} 0,75 & -,025 \\ -0,30 & 0,6 \end{bmatrix}$

- نحسب الطلب النهائي

الجديد بعد الزيادة فنحصل $[I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1,6 & 0,66 \\ 0,8 & 2 \end{bmatrix}$

على : القطاع الزراعي = DA = 600

القطاع الصناعي = DI = 600

لحساب انتاج كل قطاع ننطلق من المعادلة التالية :

$$X = [I - A]^{-1}.D$$

وهكذا نحصل على انتاج كل قطاع $\begin{bmatrix} 600 \\ 600 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1,6 & 0,66 \\ 0,8 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} X_A = 1360 \\ X_I = 1680 \end{cases}$$

نعيد صياغة الجدول من جديد.

	الزراعة	الصناعة	الاستهلاك الوسيط	الطلب النهائي	الانتاج
الزراعة	340	420	760	600	1360
الصناعة	408	672	1080	600	1680
القيمة المضافة	612	588	1200	1200	↓
الانتاج	1360	1680	←		3040

مسألة رقم 2 : يشتري تاجر سلعة بمبلغ 2 دينار ويبيعها بـــ 5 دينار.

وبمراقبة عملية البيع خلال 90 يوما، حصل التاجر على المعلومات التالية :

- ماهي أفضل كمية يشتريها التاجر لتعظيم ربحه ؟

الحــــــل

نقوم بوضع الجدول رقم 1 الذي يعطينا ربح التاجر بالنسبة للكميات المباعة والمخزونة، آخذين بعين الاعتبار الاحتمالات. وبذلك نصل إلى النتيجة التالية : أن أفضل كمية يشتريها التاجر لتعظيم ربحه هي الكمية $\vartheta = 12$ والذي يقابله ربح يعادل 34 دج.

المبيعات	عدد الأيام	الاحتمال
10	9	%10
11	18	%20
12	36	%40
13	27	%30
المجموع	**90 يوما**	**%100**

المخزون / المبيعات	10	11	12	13	الربح
10	30	28	26	24	30 دج
11	30	33	31	29	32،5 دج
12	30	33	36	34	34 دج
13	30	33	36	39	33،5 دج

الطريقة الثانية : طريقة تخفيض الخسائر : في هذه الطريقة نفترض أنه في الوضع الأمثل، الخسارة تساوي الصفر اي عندما تتعادل الكمية المخزونة مع الكمية المباعة. في الحالات التي يكون فيها المخزون أكبر من الكمية المباعة هناك خسارة. وهكذا نحصل على الجدول التالي والخاص بمبيع 10 وحدات.

الكمية المخزونة	الخسارة	الاحتمال	الخسارة المتوقعة
10	0	%10	0
11	3	%20	0،6 (المجموع)
12	6	%40	2,4 (5،7)
13	9	%30	2،7

وهكذا بإمكاننا حساب الخسارة المتوقعة لكل كمية مباعة. يمكن أن نقارن هذا الجدول بالجدول السابق الذي يعطينا الربح المتوقع من مبيع كل كمية. نصل إلى نفس النتيجة في الحالتين اي أن أفضل كمية على المنتج تخزينها هي الكمية 12 وحدة لأنها تعظم الربح ويساوي 34 حسب الجدول الأول. ويقللق من حجم الخسارة ويساوي 1,7

الكمية المباعة	الخسارة المتوقعة	الربح المتوقع
10	5،7	30
11	3،2	32،5
12	1،7	34
13	2،2	33،5

دورة عام 1985 الاستدراكية

مسألة رقم 1 : مشروعان يتقاسمان السوق. ينتج المشروع الأول الكمية X_A ويتحمل نفقة كلية $CT_A = 20X_A^2 + 50X_A + 100$.

أما المشروع الثاني فينتج الكمية X_B ويتحمل نفقة كلية

$$CT_B = -\frac{5}{2}X_B^2 + 140X_B + 200$$

الطلب العام معطى بالمعادلة التالية :

$$p = 200 - 5X(X = X_A + X_B)$$

السؤال : أحسب حجم الانتاج وسعر السلعة وربح كل مشروع في الحالات الثلاث حسب مفهوم كورنو، ستاكلبرغ وبولي.

الحـــل

نحسب الربح الاجمالي لكل مشروع فنحصل على :

$$\pi_A = X_A(200 - 5X_A - 5X_B) - 20X_A^2 - 50X_A - 100$$

$$\pi_B = X_B(200 - 5X_A - 5X_B) + \frac{5}{2}X_B^2 - 140X_B - 200$$

الحالة الأولى حسب كورنو

كل مشروع حر في تصرفه لا يأخذ بعين الاعتبار استراتيجية الآخر. تعظيم ربح كل مشروع يفترض ان نعدم المشتقات الجزئية الأولى.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\pi_A}{\partial X_A} &= 150 - 50X_A - 5X_B = 0\\ \frac{\partial\pi_B}{\partial X_B} &= 60 - 5X_A - 5X_B = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}X_A &= 3 - 0{,}1X_B\\ X_B &= 12 - X_A\end{aligned}$$

نرسم خطوط ردود الفعل للمشروعين.

يتقاطع المستقيمان في النقطة I إحداثياتها تعطينا الكميات ($X_A = 2$، و$X_B = 10$) ينتجها المشروعان.

نحسب سعر السلعة. $P = 200 - 5\ (10 + 2) = 140$

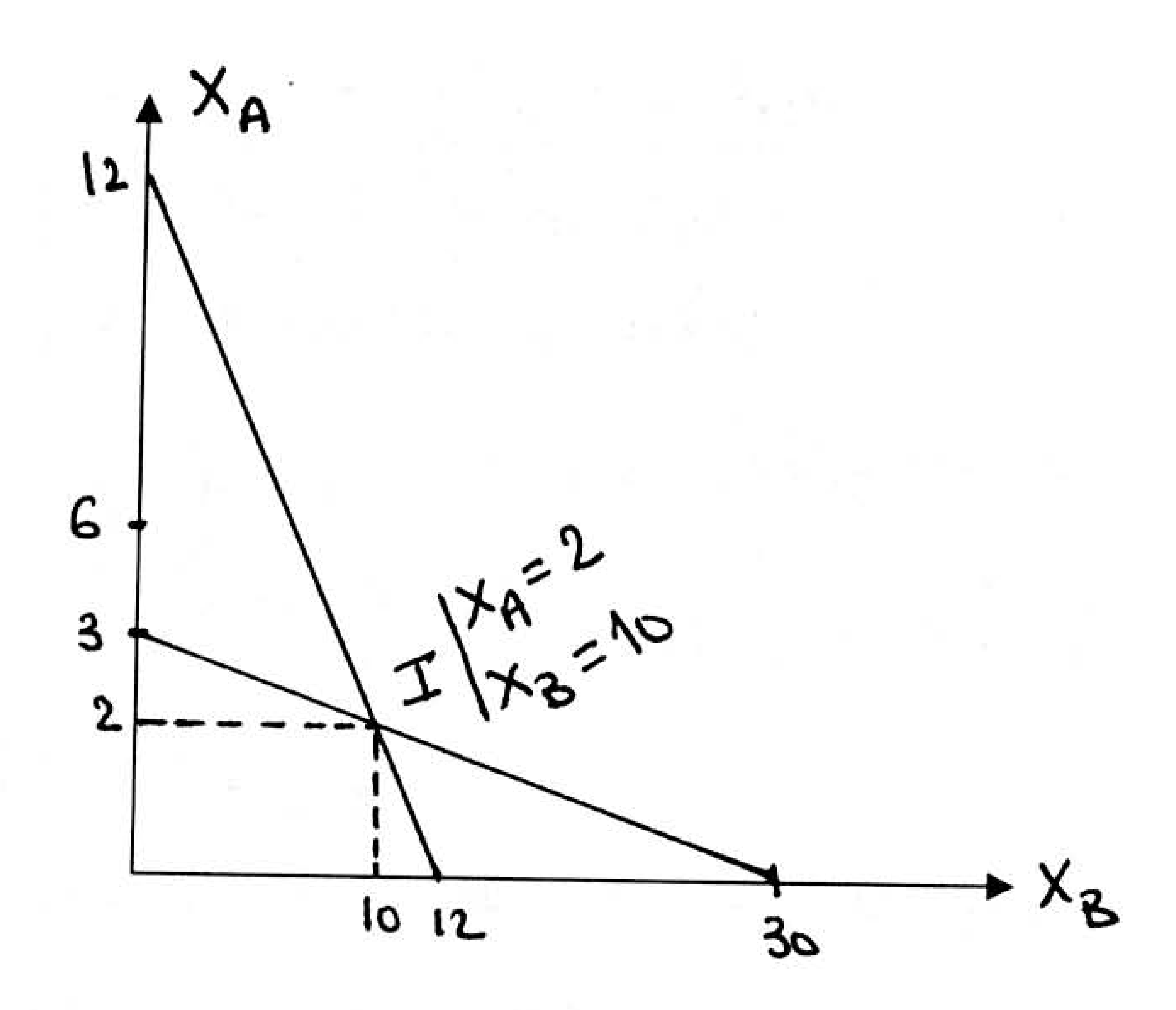
لحساب ربح كل مشروع علينا أن نحسب النفقة المتوسطة لكل مشروع فنحصل على :

النفقة المتوسطة للمشروع الأول : $CMo_A = 20X_A + 50 + \frac{100}{X_A} = 140$

النفقة المتوسطة للمشروع الثاني : $CMo_B = 2{,}5X_B + 140 + \frac{200}{X_B} = 135$

ربح المشروع الأول : $\pi_A = 2(140 - 140) = 0$

ربح المشروع الثاني : $\pi_B = 10(140 - 135) = 50$



حسب مفهوم ستاكلبرغ

نفرق ما بين حالتين حسب سيطرة كل مشروع :

الحالة الأولى : المشروع الأول هو المسيطر، نأخذ بعين الاعتبار استراتيجية المشروع الثاني $X_B = 12 - X_A$. نعوض ذلك في دالة ربح المشروع الأول فنحصل على :

$$\pi_A = X_A(200 - 5X_A - 60 + 5X_A) - 20X_A^2 - 50X_A - 100$$

شرط تعظيم الربح يفترض أن نعدم مشتق الدالة.

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial X_A} = 200 - 60 - 40X_A - 50 = 0 \Rightarrow 90 - 40X_A = 0$$

$$X_A = \frac{9}{4} \qquad X_B = \frac{39}{4} \qquad \pi_A = \frac{5}{4}$$

الحالة الثانية : نفترض أن المشروع الثاني هو المسيطر، يأخذ بعين الاعتبار استراتيجية المشروع الأول $X_A = 3 - \frac{1}{10} X_B$. نعوض ذلك في دلة ربح المشروع الثاني فنحصل على :

$$\pi_B = X_B(200 - 15 + \frac{1}{2} X_B - 5X_B) - CT_B$$

نعدم مشتق الدالة لتعظيم ربح المنتج الثاني فنحصل على :

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial X_B} = 185 - 9X_B + 5X_B - 140 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} X_B = \frac{45}{4} \\ X_A = 1{,}875 \end{array}$$

$$\pi_B = 53{,}125$$

حسب بولي

يعتقد المشروعان بأنهما مسيطران على السوق. ينتج المشروع الأول الكمية $X_A = \frac{9}{4}$

وينتج المشروع الثاني الكمية $X_B = \frac{45}{4}$

نعوض ذلك في دالة الربح لكل مشروع فنحصل على خسارة بالنسبة للمشروعين. إذن من الأفضل لهما أن يتفقا فيما بينهما لتعظيم الربح الاجمالي.

$$\pi = (X_A + X_B)(200 - \frac{5}{2} X_A - 5X_B)$$

$$-20X_A^2 - 50X_A - 100 + \frac{5}{2} X_B^2 - 140X_B - 200$$

شرط تعظيم الربح أن نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\pi}{\partial X_A} &= 150 - 50X_A - 10X_B = 0\\ \frac{\partial\pi}{\partial X_B} &= 60 - 5X_B - 10X_A = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}50X_A + 10X_B = 150\\ 10X_A + 5X_B = 60\end{cases}$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين بحلهما نحصل على الكميات المنتجة وسعر السلعة.

$x_A = 1 \qquad x_B = 10 \qquad x = 11 \qquad P = 145$

نحسب النفقة المتوسطة لكل مشروع فنحصل على :

النفقة المتوسطة للمشروع الأول : $CMo_A = 20 + 50 + 100 = 170$

النفقة المتوسطة للمشروع الثاني : $CMo_B = -2,5(10) + 140 + 20 = 135$

خسارة المشروع الأول : $\pi_A = 1(145 - 170) = -25$

ربح المشروع الثاني : $\pi_B = 10(145 - 135) = 100$

إذن ربح المشروعين = $\pi = \pi_A + \pi_A = 100 - 25 = 75$

مسألة رقم 2 : لدينا دالة الانتاج $\vartheta = \dfrac{x.y}{x+y}$

- ما هي درجة تجانس هذه الدالة ؟
- أحسب الانتاجية المتوسطة والحدية لكل عامل انتاج ؟
- ارسم منحنى السواء عندما $\vartheta = 1$ ؟
- أحسب المعدل الحدي للاحلال في النقطة A إحداثياتها : $(y_0=1,5 \; , \; x_0=3)$

- لدى المنتج ميزانية $B = 4$. كذلك أسعار عوامل الانتاج : $p_x = p_y = 1$.

ما هو أفضل مزج لعوامل الانتاج ؟

الحـــــل

- لدراسة تجانس دالة نضرب عوامل بالعامل λ حجم الانتاج يزيد بنسبة λ^k بحيث أن k تمثل درجة تجانس الدالة. نطبق ذلك على الدالة فنحصل على :

$$\vartheta = \frac{\lambda x \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda(x+y)} = \lambda \vartheta$$

إذن درجة تجانس الدالة $k = 1$ أي أن الدالة متجانسة من الدرجة الأولى.

- حساب الانتاجية المتوسطة والحدية لكل عامل انتاج.

	بالنسبة للعامل x	بالنسبة للعامل y
الانتاجية المتوسطة	$\frac{y_0}{x+y_0}$	$\frac{x_0}{x_0+y}$
الانتاجية الحدية	$\frac{y_0^2}{(x+y_0)^2}$	$\frac{x_0^2}{(x_0+y)^2}$

- عندما $\vartheta = 1$ $\quad \frac{xy}{x+y} = 1 \Leftarrow y = \frac{x}{x+1}$

الميل الحدي للاحلال = الانتاجية الحدية لـ y / الانتاجية الحدية لـ x

$$T = \frac{y_0^2}{(x+y_0)^2} \div \frac{x_0^2}{(x+y_0)^2}$$

في النقطة A إحداثياتها ($x_0 = 3$ و $y_0 = 1,5$) نعوض x و y بقيمها فنحصل على قيمة الميل الحدي للاحلال :

$$T = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{1,5}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

- دالة النفقة الكلية $CT = xp_x + yp_y \Rightarrow 4 = x + y$

نحسب y بدلالة x فنحصل على : $y = 4 - x$

أن أفضل مزج لعوامل الانتاج هو عندما يمس خط التكاليف منحنى الناتج المتساوي.

بوجه عام منحنى الناتج المتساوي هو من الشكل $a = \frac{xy}{x+y} \Leftarrow$

$$y = \frac{ax}{x-a} \Leftarrow xy - dy = ax \Leftarrow xy = a(x+y)$$

نحسب مشتق الدالة 1- $y' = -\frac{a^2}{(x-a)^2} = = -1$

نقارن مشتق الدالة : $a^2 = (x-a)^2 \Rightarrow$

$$a = x - a \Rightarrow x = 2a \Rightarrow$$

$$a = \frac{x}{2} = \frac{xy}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{x+y} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ \vartheta = 1 \end{cases}$$

دورة عام 1986

مسألة رقم 1 : مشروعان يتقاسمان السوق. دالة الطلب العام :

$$P = 200 - 2x$$

لدينا دالة النفقة الكلية للمشروع الأول : $CT_1 = 40x_1$

ودالة النفقة الكلية للمشروع الثاني : $CT_2 = 20x_2$

- احسب ربح كل مشروع في الحالات الثلاث حسب كورنو، ستاكلبرغ وبولي.

الحـــل

ربح المشروع الأول : $\pi_1 = x_1[-2(x_1 + x_2) + 200] - 40x_1$

ربح المشروع الثاني : $\pi_2 = x_2[-2(x_1 + x_2) + 200] - 20x_2$

حسب مفهوم كورنو

كل مشروع لا يهتم باستراتيجية الاخر. نعدم المشتقات الجزئية الأولى

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} &= -4x_1 - 2x_2 + 160 = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} &= -2x_1 - 4x_2 + 180 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 40 - \frac{x_2}{2} \\ x_2 &= 45 - \frac{x_1}{2} \end{aligned}$$

نرسم الخطوط البيانية لردود الفعل.

بالنسبة للمشروع الأول : $x_1 = 40 - \frac{x_2}{2}$

بالنسبة للمشروع الثاني : $x_2 = 45 - \frac{x_1}{2}$

بتقاطع المستقيمان في النقطة I

إحداثياتها هي ($x_1 = \frac{70}{3}$ و $x_2 = \frac{100}{3}$)

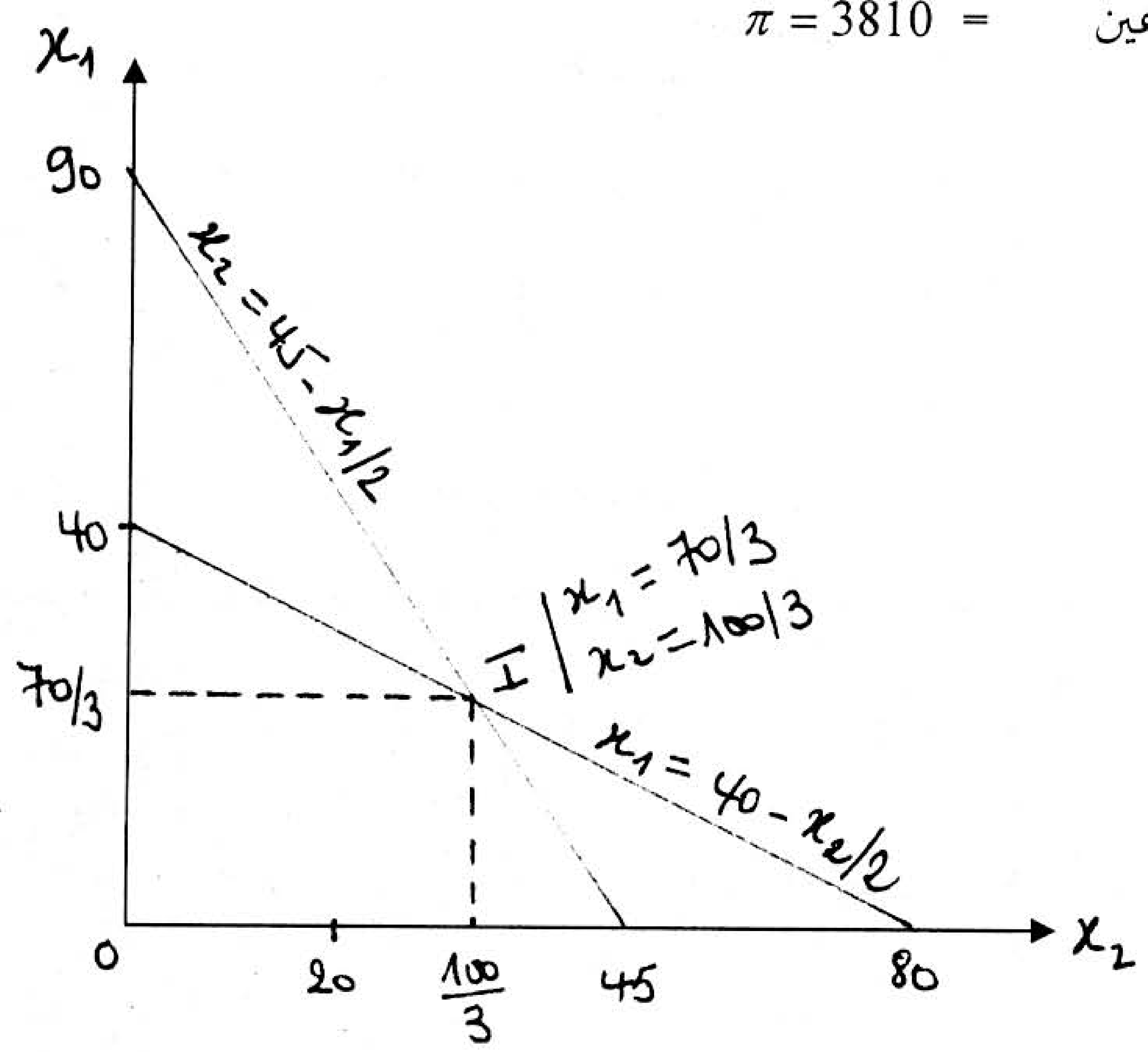
انتاج المشروعين : $x_1 + x_2 = x = \frac{370}{3}$

سعر السلعة : $p = \frac{260}{3}$

ربح المشروع الأول = $\pi_1 = 1088$

ربح المشروع الثاني = $\pi_2 = 2422$

ربح المشروعين = $\pi = 3810$



حسب ستاكلبرغ

يعتقد كل مشروع بأنه مسيطر على السوق. نميز ما بين حالتين :

الحالة الأولى : نفترض ان المشروع الأول مسيطر. يأخذ بعين الاعتبار استراتيجية الثاني $x_2 = 45 - \frac{x_1}{2}$ نعوض ذلك في دالة الربح فنحصل على :

$$\pi_1 = -x_1^2 - 95x_1 + 160x_1$$

لتعظيم هذه الدالة نعدم المشتق $\frac{d\pi_1}{dx_1} = -2x_1 + 70 = 0 \Rightarrow$

وهكذا نحصل على انتاج المشروع الأول : $x_1 = 35$، انتاج المشروع الثاني = $x_2 = 27,5$ أما ربح المشروع الأول فيساوي $\pi_1 = 1056,25$

الحالة الثانية : نفترض أن المشروع الثاني هو المسيطر، يأخذ بعين الاعتبار استراتيجية المشروع الأول $x_1 = 40 - \frac{x_2}{2}$ نعوض ذلك في دالة الربح فنحصل على : $\pi_2 = 100x_2 - x_2^2$

شرط تعظيم الربح يفترض أن نعدم مشتق الدالة :

$$\frac{d\pi_2}{dx_2} = 100 - 2x_2 = 0 \Rightarrow$$

وهكذا نحصل على انتاج المشروع الثاني $x_2 = 50$، انتاج المشروع الأول $x_1 = 15$ أما ربح المشروع الثاني فيساوي $\pi_2 = 2500$.

حسب مفهوم بولي

يعتقد المشروعان بأنهما مسيطران على السوق. ينتج المشروع الأول الكمية $x_1 = 35$ والمشروع الثاني ينتج الكمية $x_2 = 50$ ، أما انتاج المشروعين فيساوي $x = 85$. نحسب ربح كل مشروع فنحصل على :

$$\pi_1 = [-2(85) + 200]35 - 40(35)$$

بالنسبة للمشروع الأول : $\pi_1 = -162,5$

$$\pi_2 = [-2(85) + 200]50 - 20(50)$$

بالنسبة للمشروع الثاني : $\pi_2 = 750$

بوجه عام نلاحظ أن ربح كل مشروع ينخفض لذلك فمن مصلحة المشروعين أن يتفقا فيما بينهما لتعظيم الربح الاجمالي.

مسألة رقم 2 : لدينا دالة الانتاج : $\vartheta = \frac{1}{2}\sqrt[3]{xyz}$

لدينا ايضا دالة النفقة الكلية : $CT = 8x + \frac{64}{27}y + z$

- ماهي درجة تجانس هذه الدالة ؟
- أحسب الانتاجية المتوسطة والحدية لعامل الانتاج x في النقطة A إحداثياتها : $(z = 64 \ , \ y = 27 \ , x = 8)$ ؟
- ما هو الحد الأدنى للنفقة الكلية الموافقة لحجم انتاج $\vartheta = 60$ ؟
- أحسب قيمة مرونة الدالة في النقطة A ؟

الحـــــل

- لمعرفة درجة تجانس دالة ما، نضرب عوامل الانتاج بالمعامل λ نلاحظ أن حجم الانتاج يتضاعف λ^k بحيث أن k تمثل درجة تجانس الدالة. في مثلنا هذا :

$$\vartheta = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\lambda x \lambda y \lambda z} = \lambda \vartheta$$

إذن درجة تجانس الدالة هي من الدرجة الأولى : $k = 1$

- حساب الانتاجية المتوسطة والحدية لعامل الانتاج x في النقطة A إحداثياتها هي : $x = 8$ ، $y = 27$ ، $z = 64$.

الانتاجية المتوسطة = الانتاجية الكلية ÷ حجم الانتاج.

نحسب حجم الانتاج في النقطة A فنحصل على :

$$\vartheta = \frac{1}{2}\sqrt[3]{8 \times 27 \times 64} = 12$$

إذن الانتاجية المتوسطة : $\frac{\vartheta}{X} = \frac{12}{8} = 1{,}5$

الانتاجية الحدية تساوي المشتق الجزئي لدالة الانتاج.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{yz}{x^2}} = \frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{27 \times 64}{8^2}} = \frac{1}{2}$$

- مرونة الدالة : $e = \frac{\partial \vartheta / \vartheta}{\partial x / x} = \frac{\partial \vartheta / \partial x}{\vartheta / x} = \frac{\text{الانتاجية الحدية}}{\text{الانتاجية المتوسطة}}$

$$e = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3} = \frac{\text{الانتاجية الحدية}}{\text{الانتاجية المتوسطة}}$$

- حساب الحد الأدنى للنفقة الكلية الموافقة لحجم الانتاج $\vartheta = 60$

نشكل صيغة لاغرانج $V = 8x + \frac{64}{27}y + z + \lambda(60 - \frac{1}{3}\sqrt[3]{xyz}$

لتعظيم هذه الدالة نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8 - \frac{1}{6}\lambda\sqrt[3]{\frac{yz}{x^2}} = 0 \Rightarrow 8 = \frac{\lambda}{6}\sqrt[3]{\frac{yz}{x^2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{64}{27} - \frac{1}{6}\lambda\sqrt[3]{\frac{xz}{y^2}} = 0 \Rightarrow \frac{64}{27} = \frac{\lambda}{6}\sqrt[3]{\frac{xz}{y^2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 1 - \frac{1}{6}\lambda\sqrt[3]{\frac{xy}{z^2}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{\lambda}{6}\sqrt[3]{\frac{xy}{z^2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 60 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{xyz} = 0 \Rightarrow 60 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{xyz}$$

نشكل النسب

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V/\partial x}{\partial V/\partial y} &= \frac{8}{64/27} = \frac{y}{x} \\ \frac{\partial V/\partial y}{\partial V/\partial z} &= \frac{64}{27} = \frac{z}{y} \\ \frac{\partial V/\partial x}{\partial V/\partial z} &= 8 = \frac{z}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{z}{8} \\ y &= \frac{27}{64}z \end{aligned}$$

نعوض x و y بقيمها بدلالة z في الدالة الأخيرة فنحصل على :

$$60 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow 120 = \sqrt[3]{xyz}$$

$$120 = \sqrt[3]{\frac{z}{8}.\frac{27}{64}z.z} = \frac{3}{8}z \Rightarrow \begin{cases} z = 320 \\ y = 135 \\ x = 40 \end{cases}$$

$$z = \frac{120 \times 8}{3} = 320$$

نحسب قيمة النفقة الكلية الموافقة لحجم الانتاج $\vartheta = 60$ فنحصل على :

$$CT = 8(40) + \frac{64}{27}(135) + 320 = 960$$

إذن الحد الأدنى للنفقة الكلية = $CT = 960$

دورة عام 1986 الاستدراكية

مسألة رقم 1 : لدينا دالة المنفعة الكلية : $u = x^{0,4}.y^{0,6}$

واسعار السلع الافرادية $p_x = 2$ ، $p_y = 3$ ، كذلك لدينا دخل المستهلك $R = 45$.

- ما هي الكميات الواجب اقتناؤها لتعظيم المنفعة الكلية ؟
- لدينا دالة السواء لمستهلك $9 = x^{0,4}.y^{0,6}$

واسعار السلع الافرادية $p_x = 2$ ، $p_y = 3$

- أحسب الميل الحدي للاحلال ما بين السلعتين ؟
- أحسب ميل خط الميزانية وقارنه بالميل الحدي للاحلال ؟
- استخرج قيمة دخل المستهلك ؟

الحـــل

- لدينا دالة دخل المستهلك $45 = 2x + 3y$

نريد تعظيم دالة المنفعة الكلية تحت قيد دخل المستهلك :

$$V = x^{0,4}.y^{0,6} + \lambda(45 - 2x - 3y)$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على المعادلات :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0,4x^{-0,6}y^{0,6} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0,2\left(\frac{y}{x}\right)^{0,6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0,6x^{0,4}y^{-0,4} - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda 0,2\left(\frac{x}{y}\right)^{0,4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 45 - 2x - 3y = 0 \Rightarrow 45 = 2x + 3y$$

نشكل النسبة ما بين المعادلتين الأوليتين للتخلص من المعامل λ

فنحصل على : $1=\left(\frac{y}{x}\right)^{0,6}\div\left(\frac{x}{y}\right)^{0,4}$

بالأخير نحصل على : $\boxed{x=y}$

نعوض ذلك في المعادلة الأخيرة فنحصل على : $45=5x=5y$

$$u=9^{0,4}.9^{0,6}=9 \qquad \begin{cases}X=Y=9\\ u=9\end{cases}$$

$$9=x^{0,4}.y^{0,6}$$

- لدينا منحنى السواء : $x=9^{5/2}y^{-3/2}$

نحسب الميل الحدي للاحلال لذلك نشتق الدالة :

$$T=\frac{dx}{dy}=(9)^{5/2}.\left(-\frac{3}{2}\right)(y)^{-5/2}$$

نحسب ميل معادلة الدخل : $R=2x+3y\Rightarrow X=-\frac{3}{2}y+\frac{R}{2}$

نقارن الميلين فنحصل على : $-\frac{3}{2}=9^{5/2}.\left(-\frac{3}{2}\right)y^{-5/2}\Rightarrow$

$$9^{5/2}.y^{-5/2}=1\Rightarrow y^{5/2}=9^{5/2}\Rightarrow y=9$$

نعوض y بقيمتها في دالة منحنى السواء فنحصل على :

$$9=x^{0,4}.9^{0,6}\Rightarrow$$

$$x^{0,4}=9^{0,4}\Rightarrow X=Y=9$$

وبذلك نستطيع أن نحسب دخل المستهلك $R=2(9)+3(9)=45$

يمكن حساب قيمة x بطريقة ثابتة = $x=9^{5/2}.y^{-3/2}$

$$9^{5/2}.9^{-3/2}=9$$

$$x^{0,4}=9\div y^{0,6}=9\div 9^{0,6}=9^{0,4}\Rightarrow x=y=9$$

مسألة رقم 2 : لدينا دالة الانتاج $\vartheta = 0,3\sqrt[3]{KL^2}$

- ما هي درجة تجانس هذه الدالة ؟
- أحسب حجم الانتاج في النقطة A إحداثياتها $(K = 1000, L = 27)$
- احسب الانتاجية الحدية والمتوسطة لكل عامل انتاج في النقطة ؟
- احسب مرونة الدالة بالنسبة لكل عامل انتاج ؟ احسب مجموع المرونتين ؟

الحـــــل

- هذه الدالة متجانسة من الدرجة الأولى. لو ضربنا عوامل الانتاج بالمعامل λ لتضاعف حجم الانتاج λ^k بحيث أن k تمثل درجة تجانس الدالة.

$$\vartheta = 0,3\sqrt[3]{K\lambda(L\lambda)^2} = \lambda\vartheta$$

بنا أن $k = 1$ فالدالة متجانسة من الدرجة الأولى.

نحسب حجم الانتاج في النقطة A احداثياتها : $(L = 27 , K = 1000)$

نعوض ذلك في دالة الانتاج $\vartheta = 0,3(1000.(3)^6)^{1/3}$

ومنه نستخرج قيمة الانتاج $\vartheta = 0,3 \times 10 \times 9 = 27$

- حساب الانتاجية المتوسطة والحدية لكل عامل.

بالنسبة لعامل راس المال :

الانتاجية المتوسطة : $\frac{\vartheta}{K} = \frac{27}{1000} = 0,027$

الانتاجية الحدية : $\frac{\partial \vartheta}{\partial K} = 0,1K^{-2/3}L^{2/3} =$

$$0,1\left(\frac{L}{K}\right)^{2/3} = \frac{9}{1000}$$

بالنسبة لعنصر العمل :

الانتاجية المتوسطة : $1 = \frac{\vartheta}{L} = \frac{27}{27} = 1$

االانتاجية الحدية : $\frac{\partial \vartheta}{\partial L} = \frac{2}{3} = 0,2K^{1/3}L^{-1/3} = 0,2\left(\frac{K}{L}\right)^{1/3}$

- حساب مرونة الانتاج بالنسبة لعاملي الانتاج :

بالنسبة لعنصر العمل : المرونة = $\frac{\text{الانتاجية الحدية}}{\text{الانتاجية المتوسطة}}$

$$e_L = \frac{\partial \vartheta / \vartheta}{\partial L / L} = \frac{\partial \vartheta / \partial L}{\vartheta / L}$$

نطبق ذلك في مثلنا هذا فنحصل على : $e_L = \frac{2/3}{1} = \frac{2}{3}$

بالنسبة لعنصر راس المال لدينا المرونة = $\frac{\text{الانتاجية الحدية}}{\text{الانتاجية المتوسطة}} = e_k$

$$e_K = \frac{\partial \vartheta / \partial K}{\partial / K}$$

$$e = \frac{9/1000}{27/1000} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

نجمع كل هذه العناصر في الجدول التالي :

عوامل الانتاج	الانتاجية المتوسطة	الانتاجية الحدية	القيمة	المرونة
عنصر العمل	1	2/3	$e_L = \frac{\partial \vartheta / \vartheta}{\partial L / L}$	$e_L = 2/3$
عنصر راس المال	$\frac{27}{1000}$	$\frac{9}{1000}$	$e_K = \frac{\partial \vartheta / \vartheta}{dK / K}$	$e_K = 1/3$

مجموع المرونتين = $\ell_K + \ell_L = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ تساوي درجة تجانس الدالة.

تمارين متفرقة

1- لدينا متواليتين: الأولى $\{a,b,c\}$ تشكل متوالية حسابية والثانية $\{a',b',c'\}$ تشكل متوالية هندسية

هاتين المتواليتين لهما نفس الأساس τ من جهة أخرى لدينا

$$\begin{cases} a+a'=1 \\ b+b'=5 \\ c+c'=11 \end{cases}$$

السؤال: احسب هذه الأعداد الستة وكذلك أساس كل من المتواليتين؟

الحل

المتوالية الحسابية $\{a=-1,\ b=+1,\ c=3\}$ أساس المتوالية $\tau = 2$

المتوالية الهندسية أساسها $\{a'=+2,\ b'=4,\ c'=8\}$ أساس المتوالية $\tau = 2$

نلاحظ أن $\{a+a'=1,\ b+b'=5,\ c+c'=11\}$.

2- مبلغان من المال مجموعهما $x+y=60000$

وضعا بمعدلات فائدة مجموعهما $t_x + t_y = 9\%$

الفائدة السنوية للمبلغ الأول 1000دج والثاني 1750دج

السؤال: احسب المبلغين ومعدلات الفائدة للمبلغين

الحل

$$y = 60000 - x$$
$$t_y = 9\% - t_x$$

إذن فائدة المبلغ الثاني السنوية $yt_y = (60000-x)(9\%-t_x) = 1750$

بعد الاختصار

$$2000t^2 - 155t + 3 = 0 \qquad \Delta = 25 \; et \; \sqrt{\Delta} = 5$$

$$t_x = \frac{155+5}{40000} = 4\% \qquad t_y = 9\% - 4\% = 5\%$$

$$x = \frac{1000}{4\%} = 25000DA \;\; et \;\; y = \frac{1750}{5\%} = 35000DA$$

$$x + y = 25000 + 35000 = 60000DA$$

3- ثلاثة أعداد تشكل متوالية هندسية مجموعها $s = 35$

إذا طرحنا العدد 1 من الحد الأول والعدد 2 من الحد الثاني والعدد 8 من الحد الثالث نحصل على متوالية حسابية.

السؤال: أوجد هذه الأعداد

الحل

مجموع أعداد متوالية هندسية $35 = a(1 + \tau + \tau^2)$

تشكل متوالية حسابية $(a-1)(a\tau - 2)(a\tau^2 - 8)$

بحل هاتين المجموعتين نحصل على

متوالية حسابية $\begin{matrix}(4,8,12)\\(19,8,-3)\end{matrix}$ متوالية هندسية $\begin{matrix}(5,10,20)\\(20,10,5)\end{matrix}$

4- لدينا المتوالية الحسابية $\{3, x, ..., y, 163\}$

من جهة أخرى $y = 19x + 6$

السؤال: أوجد قيمة x و y ورتبة الحد الأخير.

الحل

نرمز τ أساس المتوالية الحسابية $\tau = x - 3 = 163 - y$

إذن $x + y = 166$ من جهة أخرى لدينا $y = 19x + 6$

بحل جملة المعادلتين نحصل على $\begin{cases} x = 8 \\ y = 158 \\ \tau = 5 \end{cases}$

عدد حدود المتوالية $163 = 3 + (n-1)5$

ومنها نجد $n = 33$

إذن رتبة الحد الأخير هي العدد 33

تمـــــــارين عامـــة

تمرين رقم 1: لدينا دالة الإنتاج $Q = \frac{KL}{K+L}$

احسب درجة تجانس الدالة بثلاث طرق مختلفة

الحل

الطريقة الأولى: نضرب عوامل الانتاج K وL بالمقدار t حجم الإنتاج سوف يضرب بالمقدار t^k بحيث أن k تمثل درجة تجانس الدالة

$$Q? = \frac{Kt \ Lt}{Kt+Lt} = \frac{KLt^2}{(K+L)t} = \frac{KL}{K+L}t = t.Q$$

إذن الدالة متجانسة من الدرجة الأولى

الطريقة الثانية: نطبق دستور Euler المعطى بالعلاقة $Kf_K + Lf_L = k.Q$

بحيث أن f_L, f_K تمثل المشتقات الجزئية أو الإنتاجية الحدية لكل عامل إنتاج

$$f_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{L(K+L)-KL}{(K+L)^2} = \frac{L^2}{(K+L)^2}$$

$$f_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{L(K+L)-KL}{(K+L)^2} = \frac{K^2}{(K+L)^2}$$

$$Kf_K + Lf_L = \frac{KL^2}{(K+L)^2} + \frac{LK^2}{(K+L)^2} = \frac{KL(K+L)}{(K+L)^2} = \frac{KL}{K+L} = Q$$

إذن الدالة متجانسة من الدرجة الأولى k=1

الطريقة الثانية: عن طريق مرونة كل عامل إنتاج

$$e_K = \frac{\partial Q / \partial K}{Q/K} = \frac{\text{الإنتاجية الحدية}}{\text{الإنتاجية المتوسطة}} = \frac{L^2}{(K+L)^2} \div \frac{L}{K+L} = \frac{L}{K+L}$$

$$e_L = \frac{\partial Q / \partial L}{Q/L} = \frac{\text{الإنتاجية الحدية}}{\text{الإنتاجية المتوسطة}} = \frac{K^2}{(K+L)^2} \div \frac{K}{K+L} = \frac{K}{K+L}$$

درجة تجانس الدالة 1 $e_K + e_L = \frac{L}{K+L} + \frac{K}{K+L} = \frac{K+L}{K+L} = 1$

إذن حسب هذه الطرق الثلاثة نحصل على نفس النتيجة.

تمرين رقم 2: لدينا دوال الإنتاج التالية: احسب درجة التجانس

درجة ثالثة $a)\ Q = 3K^2L \qquad k = 3$

درجة أولى $b)\ Q = aK + bL \qquad k = 1$

درجة أولى $c)\ Q = \frac{K^3}{KL + L^2} \qquad k = 1$

درجة أولى $d)\ Q = \sqrt{L^2 + 8KL} \qquad k = 1$

درجة نصف $e)\ Q = \frac{KT + KL - T^2}{L^{3/2}} \qquad k = 1/2$

دالة غير متجانسة $f)\ Q = KL + L$

تمرين رقم 3: لدى شخص مبلغ محدد من المال يخصصه لشراء عدد من البرتقال من النوع الصغير والمتوسط والكبير. فإذا خصص كل المبلغ لشراء البرتقال من النوع الصغير بدلا من المتوسط يحصل على 5 برتقالات إضافية. ولو خصص المبلغ لشراء البرتقال من النوع الكبير بدلا من المتوسط نحصل على 3 برتقالات بالناقص.

السؤال: ما هو المبلغ وما هي أسعار الأنواع الثلاثة من البرتقال علما بأن الفارق في الأسعار بين كل نوع هو 5دج

الحل

نفترض y المبلغ و x ثمن البرتقال من النوع المتوسط نحصل على

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{x+5}=3\\[2mm]\dfrac{y}{x-5}-\dfrac{y}{x}=5\end{array}\right\}$$

بحل جملة المعادلتين لمجهولين نحصل على $y = 300DA$ و $x = 20DA$

تمرين رقم 4: ثلاثة أخوة اشتروا قطعة أرض بمبلغ 10.000دج يقول الأخ الوسط بأنه بإمكانه شراء الأرض لوحده لو أعطاه الأخ الصغير نصف ما يملكه. يقول الأخ الصغير بأنه بإمكانه شراء الأرض لو أعطاه الأخ الكبير ثلث حصته. أخيرا يقول الأخ الكبر بأنه بإمكانه شراء قطعة الأرض لو أعطاه الأخ الأوسط ¼ حصته.

السؤال: ما هو المبلغ الذي هو في حوزة كل أخ؟

الحل

نفترض x المبلغ الذي في حوزة الأخ الأكبر و y المبلغ الذي في حوزة الأخ الأوسط و z المبلغ الذي في حوزة الأخ الصغير بحل جملة ثلاث معادلات لثلاثة مجاهيل نحصل على

$$\begin{cases}y+\dfrac{z}{2}=10000DA\\[2mm] z+\dfrac{x}{3}=1000DA\\[2mm] x+\dfrac{y}{4}=10000DA\end{cases}$$

$x = 8400DA$	حصة الكبير
$y = 6400DA$	حصة الأوسط
$z = 7200DA$	حصة الصغير

تمرين رقم 5: يخلط تاجر نوعين من الزيت. لو خلط 5 لتر من النوع الأول و3لتر من النوع الثاني سيبيع الخليط بسعر 110دج للتر. بينما لو خلط 3 لتر من النوع الأول ولتر واحد من النوع الثاني سيبيع الخليط بسعر 115دج اللتر.

السؤال 1: احسب سعر اللتر من الزيت من كل نوع

السؤال 2: لو خلط البائع النوعين بطريقة أخرى لحصل على خليط يبيع اللتر بسعر 109دج. ما هي نسبة الكميات من النوعين

الحل

$$\begin{Bmatrix} 5x + 3y = 880DA \\ 3x + y = 460DA \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 125DA \\ y = 85DA \end{matrix}$$

في الحالة الثانية:

$$125x + 85y = 109(x + y)$$

$$16x = 24y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$$

تمرين رقم 6: لدينا دالة فيليبس والتي تربط ما بين معدل البطالة ومعدل التضخم بالعلاقة التالية $y = a + \frac{b}{x}$ (a,b هي ثوابت)

حدد قيمة هذه الثوابت علما بأن الدالة تمر بالنقطتين A, B احداثياتها هي:

$$A\left|\begin{matrix} x = 1 \\ y = 7 \end{matrix}\right. \qquad B = \left|\begin{matrix} x = 1{,}8 \\ y = 3 \end{matrix}\right.$$

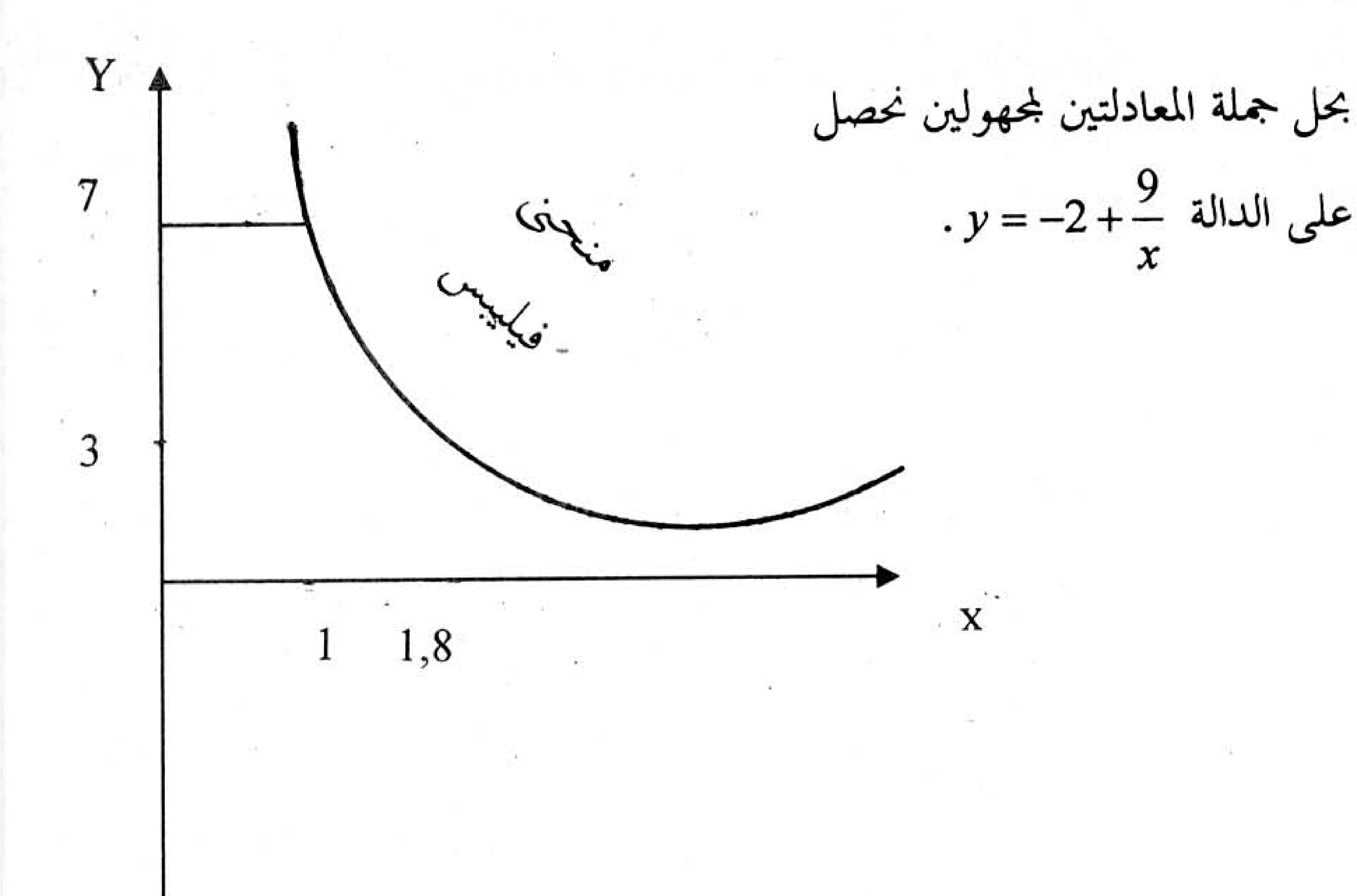
الحل

تمر الدالة بالنقطة A: $7 = a + b$

تمر الدالة بالنقطة B: $3 = a + \frac{b}{1{,}8}$

بحل جملة المعادلتين لمجهولين نحصل

على الدالة $y = -2 + \frac{9}{x}$.



<u>تمرين رقم 7</u>: وزع ارث بالتساوي ما بين الورثة

حصل الأول على $50.000DA + \frac{1}{5}$ ما تبقى من الإرث

حصل الثاني على $100.000DA + \frac{1}{5}$ ما تبقى مما تبقى من الإرث

حتى الأخير

<u>السؤال</u>: احسب مقدار الإرث وعدد الورثة؟

<u>الحل</u>

نفترض x مقدار الإرث

يحصل الأول على $y = (50000 - x)\frac{1}{5} + 50000DA$

يحصل الثاني على $(100.000 - y - x)\frac{1}{5} + 100.000DA$

بما أن كل الحصص متساوية نعادل ما بين الحصتين.

$$50000DA+\frac{x}{5}-10000=100.000+\frac{x}{5}-\frac{y}{5}\Rightarrow\frac{y}{5}=50000$$

$$40000+\frac{x}{5}=100.000+\frac{1}{5}\left(x-40000-\frac{x}{5}-10000\right)$$

$$40000+\frac{x}{5}=100.000+\frac{1}{5}\left(x-40000-\frac{x}{5}-100.000\right)$$

$$40000+\frac{x}{5}=100.000+\frac{4}{25}x-\frac{140000}{5}$$

$$40000+\frac{x}{5}=\frac{4x}{25}+72.000$$

$$\frac{x}{5}-\frac{4x}{25}=\frac{x}{25}=72.000-40000=32000$$

قيمة الإرث $x=32000(25)=800.000DA$

يحصل الأول على $50000+\frac{1}{5}(800.000-50000)=200.000DA$

بما أن كل الحصص متساوية إذن عدد الورثة هو $\frac{800.000}{200.000}=4$

تمرين رقم 8: يزيد راسمال شركة كل عام بمقدار الثلث 3/1 وفي نهاية العام يسحب منه 21.000دج. في نهاية العام الثالث تضاعف المبلغ.

السؤال: احسب قيمة هذا المبلغ؟

الحل

نفترض x قيمة المبلغ في نهاية السنة الأولى نحصل على $y=\frac{4x}{3}-21000DA$

وفي نهاية السنة الثانية $z=\frac{4y}{3}-21000DA$

نعوض x بقيمتها $z=\frac{16x}{9}-49000DA$

وفي نهاية السنة الثالثة $T=\frac{4}{3}\left(\frac{16x}{9}-49000\right)-21000$

ضعف المبلغ $T=\frac{64x}{27}-\frac{196000}{3}-21000=2x$

$$\frac{64}{27}x-2x=65333+21000\Rightarrow x=233100DA$$

نهاية السنة الأولى يصبح $233100+\frac{1}{3}(233100)-21000=289800$

نهاية السنة الثانية يصبح 336200

نهاية السنة الثالثة $466200=2(233100)$

تمرين رقم9: المطلوب حساب عمر الأب وولديه حسب المعطيات التالية:

قبل عامين كان عمر الإبن = $\frac{1}{3}$ عمر الأب

وبعد 5 سنوات أصبح عمر الأب 4 أضعاف عمر البنت كذلك نعلم بأن عمر البنت هو ½ عمر الابن

السؤال: احسب أعمار الأشخاص الثلاثة؟

الحل

نفترض x عمر الأب في الوقت الحاضر، قبل عامين كان عمره $(x-2)$.

نفترض عمر الابن y إذن لدينا المعادلة $(x-2)=(y-2)3$

نفترض z عمر البنت إذن لدينا العلاقة التالية: $(x+5)=4(z+5)$

كذلك لدينا $y=2z$

نعوض فنحصل على جملة معادلتين لمجهولين

$$\begin{cases}(x-2)=3(y-2)\Rightarrow x-2=3y-6\\ (x+5)=4\left(\dfrac{y}{2}+5\right)\Rightarrow x+5=2y+20\end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix}x-3y=-4\\ x-2y=15\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y=19\\ z=9{,}5\end{cases}\quad x=53$$

تمرين رقم 10: توفي شخص تاركا وراءه امرأة حامل ومبلغ 130.000دج. ولقد حدد في وصيته: إذا كان المولود صبي سيحصل على 5/3 من الإرث والباقي للأم، أما إذا كان المولود بنت ستحصل على 7/3 من الإرث والباقي للأم. عند الولادة أنجبت الأم صبي وبنت.

المطلوب توزيع الإرث على الأشخاص الثلاثة بحيث أن حصة الولد والبنت بالنسبة للأم تبقى ثابتة؟

الحل

نفترض S مقدار الميراث، حصة الولد هي $\frac{3S}{5}$ وحصة البنت $\frac{3S}{7}$. أما بالنسبة للأم حصة الولد للأم هي 2/3 وحصة البنت هي 4/3 . نفترض x حصة الأم نحصل على المعادلات التالية:

$$x+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}x=130000DA\Rightarrow 13x=130.000DA$$

$$4x+6x+3x=13x=130.000\Rightarrow x=10000DA$$

حصة الأم هي $4x = 40000DA$

حصة الإبن هي $6x = 60000DA$

حصة البنت هي $3x = 30000DA$. المجموع $S=130000DA$

تمرين رقم11: نظمت مدرسة رحلة لتلاميذها أثناء الطريق تعطلت 10 سيارات وأضطر المسئولون توزيع الطلبة على السيارات الأخرى بحيث أن ركاب كل سيارة زاد براكب واحد. ثم تابعت المدرسة الرحلة فتعطلت 15 سيارة واضطر المسئولون توزيع الطلبة على السيارات الأخرى بحيث أن كل سيارة حصلت على راكبين إضافيين.

السؤال: أحسب عدد التلاميذ وعدد السيارات

الحـــــل

نفترض x عدد السيارات و y عدد التلاميذ في كل سيارة

إذن عدد التلاميذ هو $N = x.y$

حسب معطيات المسألة في المرة الأولى للتعطيل $N = (x-10)(y+1)$

في المرة الثانية للتعطيل $N = (x-25)(y+3)$

نحصل في الأخير بعد فك الأقواس

$$\left.\begin{array}{r} x-10y=10 \\ 3x-25y=75 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

عدد السيارات $\boxed{x=100}$

عدد التلاميذ في السيارة $y=9$ ، $\boxed{N=900}$ عدد التلاميذ

تمرين رقم 12: اشترى شخصان مقدارg 200 و g 300 من اللحم للغذاء، أثناء الغذاء تقدم شخص ثالث ليشاركهم في الغذاء و دفع مبلغ 100 DA ثمن حصته.

السؤال : وزع هذا المبلغ بين الشخصين

الحـــــــل

قيمة الغذاء هو $3 \cdot 100 = 300DA$

سعر 200 g لحم يساوي 2/5 قيمة المبلغ أي $300x\frac{2}{5} = 120DA$

سعر 300 g لحم يساوي 3/5 قيمة المبلغ أي $300x\frac{3}{5} = 180DA$

أي أن الشخص الأول يقبض $20DA$ و الثاني يقبض $80DA$

تمرين رقم 13: أوصى ملك على تاج وأعطى للصائغ 8كغ ذهب+2كغ فضة لكن الملك شك في نوايا الصائغ و طلب من العالم أن يتأكد من صحة ذلك، قام العالم بغطس التاج في الماء. و كما هو معروف يفقد الذهب 1/20 من وزنه بينما الفضة يفقد 1/10 من وزنه نحن نعلم بأن التاج يزن $9kg\frac{1}{4}$ بعد غطسه في الماء.

السؤال : هل الصائغ شريف أم أنه لص.

الحـــــــل

لو كان التاج مصنوع من الذهب الخالص لأصبح وزنه $9kg\frac{1}{2}$

لو كان التاج مصنوع من الفضة الخالصة لأصبح وزنه $9kg$

التاج يزن $9kg\frac{1}{4}$ أي في الوسط هذا يعني أنه يحتوي على 5كغ ذهب+5كغ فضة.

النتيجة: الصائغ لص لأنه استبدل 3كغ ذهب بـــ 3كغ فضة لأنه في بادئ الأمر حصل الصائغ على 8كغ ذهب+2كغ فضة.

تمـــــرين عــــام

لدينا دالة المنفعة الكلية $u=(x+2)(y+2)$

بحيث أن u تمثل المنفعة الكلية x و y الكميات المستهلكة من السلعتين

1- حدد دوال الطلب لكل من السلعتين

2- أحسب المقادير x و y علما بأن الدخل $P_x=46, P_y=1, R=14$

3- حدد مقدار انخفاض السلعة الأولى P_x علما بأن P_y و R تبقى ثابتة لكي نحصل على $x=7$ أحسب قيمة P_x و y.

4- تحدث عن أثر التعويض أو الإحلال و أثر الدخل

الحل

1- للحصول على دوال الطلب نعظم دالة المنفعة الكلية تحت قيد الدخل أو

الميل الحدي للإحلال ـــــــ $\dfrac{\text{المنفعة الحدية } x}{\text{المنفعة الحدية } y}=\dfrac{y+2}{x+2}=\dfrac{P_x}{P_y}$

$$P_x(x+2)=P_y(y+2)\Rightarrow xP_x+2P_x=yP_y+2P_y \quad (1)$$

من جهة أخرى لدينا دالة الدخل $R=xP_x+yP_y$ (2)

في المعادلة الأولى $xP_x=yP_y+2P_y-2P_x$ نعوضها في الدالة (2)

$$R=2yPy+2(Py-Px)\Rightarrow y=\frac{R-2(P_y-P_x)}{2P_y}$$

$$xP_x=R-yP_y \qquad x=\frac{R-2(P_y-P_x)}{2P_x}$$

هذه هي دوال الطلب المطلوبة

2- حساب قيمة x و y علما بأن $R=14$ $\quad P_x=4 \quad P_y=1$

$$y=\frac{14+6}{2}=10 \qquad x=\frac{14-6}{8}=1$$

الجواب $(u = 36, \quad y = 10, \quad x = 1)$

3- $R = xP_x + yP_y$ نعوض Py, x, R بقيمها فنحصل $14 = 7P_x + y$ نحن نعلم $\frac{y+2}{x+2} = TMS = \frac{P_x}{P_y} = \frac{P_x}{1}$.

من جهة أخرى:

$$(y+2) = P_x(x+2) \Rightarrow \begin{cases} y = xP_x + 2P_x - 2 \\ y = 14 - 7P_x \end{cases}$$

$$7P_x + 2P_x - 2 = 14 - 7P_x \Rightarrow 9P_x - 2 = 14 - 7P_x \Rightarrow$$
$$16P_x = 16 \Rightarrow \boxed{P_x = 1}$$

حساب قيمة y : $y = 7 \Leftarrow 14 = 7 + y$

الجواب $P_x = 1$ و $u = (7+2)(7+2) = 81 \Leftarrow y = 7$

لدينا $(y+2) = \frac{36}{(x+2)} \Leftarrow 36 = u = (x+2)(y+2)$

عند التوازن $x = y \Leftarrow x + 2 = y + 2 \Leftarrow 1 = \frac{P_x}{P_y} = TMS = \frac{y+2}{x+2}$

$$36 = (x+2)^2 = (y+2)^2 \Rightarrow x + 2 = y + 2 = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

أو $R = xP_x + yP_y = 4 + 4 = 8$

$P_x = P_y = 1$ لأن $x = \frac{R}{2} = y$

$$u = (x+2)(y+2) = \left(\frac{R}{2} + 2\right)^2 \Rightarrow \frac{R}{2} + 2 = 6 \Rightarrow R = 8$$

$x = y = \frac{R}{2} = 4$ بما أن $8 = xPx + yPy = x + y$

نصل إلى نفس النتائج.

لدينا النقاط الثلاث: $C\left|\begin{matrix}x=4\\y=4\end{matrix}\right.$ $B\left|\begin{matrix}x=7\\y=7\end{matrix}\right.$ $A\left|\begin{matrix}x=1\\y=10\end{matrix}\right.$

بذلك نستطيع أن نكتب

1- اثر الإحلال $\begin{cases}X_C - X_A = 4-1=3\\ Y_C - Y_A = 4-10=-6\end{cases}$

2- أثر الدخل $\begin{cases}X_B - X_C = 7-4=3\\ Y_B - Y_C = 7-4=3\end{cases}$

3- الأثر العام= مجموع الأثرين: أثر الإحلال + اثر الدخل

$$\begin{cases}X_B - X_A = 7-1=3+3=6\\ Y_B - Y_A = 7-10=-3=3-6\end{cases}$$

تمرين 2: يحصل شخص على راتب شهري صافي بمقدار 8000دج ينفقه على الشكل التالي معطى في الجدول التالي:

العناصر	نسبة النفقات من الدخل	مرونة الدخل
المواد الغذائية	25%	0,3
الملابس	10%	0,8
السكن	40%	0,55
التنقل	15%	2,4

من جهة أخرى حصل هذا الشخص على زيادة في الدخل تقدر بـ17%

المطلوب ملء جدول يعطي المعلومات التالية: النفقات قبل وبعد الزيادة في الراتب، معدل الزيادة النسبي والمطلق.

احسب مرونة الدخل بالنسبة لمجموع النفقات؟

الحل

العناصر	e	قبل الزيادة	معدل التغير	القيمة المطلقة	بعد الزيادة
الدخل	-	8000DA	17%	1360	9360
المواد الغذائية	0,3	2000DA	5,1%	102	2102
الملابس	0,8	800	13,6%	108,8	909
السكن	0,55	3200	9,3%	299,2	3499,2
النقل	2,4	1200	40,8%	489,6	1689,6
مجموع النفقات	0,82	7200	13,9%	999,6	8199,6

بالنسبة لمعدلات التزايد تحسب على الشكل التالي: $\frac{\Delta D}{D} = e\frac{\Delta R}{R}$

1- بالنسبة للمواد الغذائية 0,3(17%)=5,1%

2- بالسبة للملابس 0,8(17%)=13,6%

3- بالنسبة للسكن 0,55(17%)=9,3%

4- بالنسبة للنقل 2,4(17%)=40,8%

المرونة الكلية لكافة النفقات $e = 0,82$ $\quad e_R = \frac{\Delta D / D}{\Delta R / R} = \frac{13,9}{17\%}$

مفهوم المرونة

مستهلك دخله 20000دج ينفقه كالتالي:

العناصر	%	e
المواد الغذائية	25%	½
السكن	10%	0,7
الملابس	30%	0,6
النفقات الأخرى	20%	1,8

نفترض أن الدخل يزيد بنسبة 10%

احسب بالنسبة لكل عنصر وبالنسبة لميزانية المستهلك مقدار النفقات قبل وبعد الزيادة للدخل

احسب معدل الإدخار؟

الحل

العناصر	النسب المئوية	المرونة e	مستوى الدخل في بادئ الأمر	معدل التغير	القيمة المطلقة	مستوى الدخل في النهاية
الدخل	-	-	20000	%10	2000	22000
المواد الغذائية	0,25	0,5	5000	%5	250	5250
الملابس	0,30	0,6	6000	%6	360	6360
السكن	0,10	0,7	2000	%7	140	2140
الراحة	0,20	1,8	4000	%18	720	4720
النفقات العامة	0,85	-	17.000	%8,65	1470	18470

حساب مرونة الدخل $e_R = \dfrac{\Delta C / C}{\Delta R / R} = \dfrac{8{,}65\%}{10\%}$

الإدخار=الدخل-نفقات الاستهلاك بنسبة الإدخار إلى الدخل

في بادئ الأمر: $20000 - 17000 = 3000DA$ إذن $\dfrac{3000}{20000} = 15\%$

بعد الزيادة: $16\% = \frac{3530}{22000} = 18470 - 22000$

2- لدينا دالة الطلب $p = f(q)$ احسب دالة الطلب علما بأن المرونة السعرية $= e = -1$.

الحل

$$e = \frac{dq/q}{dp/p} = -1 \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{dp}{p}$$

نحسب التكامل:

$$\int \frac{dq}{q} = -\int \frac{dp}{p} \Rightarrow L_e P \Rightarrow L_e Q + L_e P = 0 \Rightarrow$$

$$LPQ = 0 = La \Rightarrow PQ = a \Rightarrow p = \frac{a}{q}$$

هذه هي دالة الطلب.

3- لدينا دالة الطلب $p = 384 - 2q^2$

السؤال: أحسب قيمة المرونة عندما تمر دالة الإيراد الكلي بحدها الأقصى.

الحل

دالة الايراد الكلي $RT = p \times q = 384q - 2q^3$

دالة الايراد الحدي $RMa = 384 - 6q^2$

تمر دالة الايراد الكلي بحدها الأقصى عندما نعدم مشتق الدالة أي نعدم دالة الايراد الحدي $p = 256$ $\quad 384 - 6q^2 = 0 \Rightarrow q = 8$

لكن نحن نعلم بأن المرونة

$$e=\frac{dq/dp}{p/q}=\frac{dq}{dp}\left(\frac{p}{q}\right)\Rightarrow\frac{dp}{dq}=-4q\Rightarrow$$

$$\frac{dq}{dp}=-\frac{1}{4q}\Rightarrow e=-\frac{1}{4q}\left(\frac{384-2q^2}{q}\right)=\frac{2q^2-384}{4q^2}$$

$$q=8\Rightarrow e=\frac{2(8)^2-384}{4(8)^2}=\frac{128-384}{256}=-1$$

$$e=-1$$

3- يخصص مستهلك دخله R لشراء سلعتين x و y الأسعار الافرادية هي p_x و p_y. لدينا دالة المنفعة الكلية

$$u=(2x-1)^{1/2}(y-4)^{1/2}\ avec\ x\rangle\frac{1}{2}\ et\ y\rangle 4$$

x و y تمثلان الكميات المستهلك من السلعتين.

1- حدد دوال الطلب للسلعتين وكذلك منحنيات إنجل علما بأن

$$p_y=1,\quad p_x=2$$

2- نفترض دخل المستهلك R=11 احسب الكميات x و y

3- نفترض أن سعر السلعة x أي p_x يتضاعف بينما سعر السلعة p_y يبقى على حاله. احسب أثر التعويض والدخل بالنسبة للسلعتين؟

4- احسب مرونة السلعتين e_x و e_y عندما

$$p_x=4\ ,\ p_y=1\ ,\ R=11$$

الحل

نستخلص دوال الطلب بطريقتين:

الطريقة الأولى: طريقة La grange

$$V = (2x-1)^{1/2}(y-4)^{1/2} + \lambda(R - xp_x - yp_y)$$

لتعظيم هذه الدالة نعدم المشتقات الجزئية لكل من x و y نحسب قيمة كل من المعادلتين ونعادلها فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial X} &= \frac{1}{2}2(2x-1)^{-1/2}(y-4)^{1/2} - \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial Y} &= \frac{1}{2}(2x-1)^{1/2}(y-4)^{-1/2} - \lambda p_y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$(2x-1)p_x = 2(y-4)p_y \Rightarrow y = (2x-1)\frac{p_x}{2p_y} + 4$$

نعوض y بقيمتها في حالة الدخل فنحصل على: $\boxed{y = \frac{R}{2p_y} - \frac{p_x}{4p_y} + 2}$

كذلك بالنسبة للسلعة x فنحصل على: $\boxed{x = \frac{R}{2p_x} - 2\frac{p_y}{4p_x} + \frac{1}{4}}$

الطريقة الثانية: نعادل المنفعة الحدية لكل سلعة مع سعرها

$$uMaX = \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{1}{2}2(2x-1)^{-1/2}(y-4)^{1/2}$$

$$uMaY = \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{1}{2}(2x-1)^{1/2}(y-4)^{-1/2}$$

$$\frac{uMaX}{P_x} = \frac{uMay}{P_y} \Rightarrow -2x-1)p_x = 2(y-4)p_y$$

ونصل إلى نفس النتيجة كما في الحالة الأولى

لكي نحصل على معادلات منحنى إنجل للسلعتين x و y يكفي أن نعوض في دوال الطلب الأسعار الافرادية فنحصل على:

بالنسبة للسلعة الأولى X : $x = \frac{R}{4} - \frac{3}{4}$

بالنسبة للسلعة الثانية Y: $y = \frac{R}{2} + \frac{3}{2}$

إن أفضل الكميات الممكن أن نحصل عليها هي أن نعوض في دوال الطلب R, p_y, p_x بقيمتها فنحصل على: $u = (6)^{1/2}$ $y = 7$ $x = 3/2$

2- بالنسبة $u = (6)^{1/2}$ لدينا $6^{1/2} = (2x-1)^{1/2}(y-4)^{1/2}$

نربع الطرفين فنحصل على $6 = (2x-1)(y-4) \Rightarrow y = \frac{6}{2x-1} + 4$

المعدل الحدي للاحلال

نعادل الميل الحدي للاحلال مع نسبة الأسعار الافرادية $\frac{dy}{dx} = \frac{12}{(2x-1)^2}$

$$\frac{12}{(2x-1)^2} = 4 \Rightarrow x = 1{,}37 \quad y = 7{,}46$$

في الأخير نعرف قيمة كل من الدخل $R = 11$ والأسعار الافرادية $p_x = 4$ و $p_y = 1$ الكميات المستهلكة من السلعتين من دوال الطلب :

$$y = \frac{R}{2p_y} - \frac{p_x}{4p_y} + 2 \qquad x = \frac{R}{2p_x} - \frac{2p_y}{p_x} + \frac{1}{4}$$

$$x = 1{,}125 \qquad u = 2{,}70 \qquad y = 6{,}5$$

إذن لدينا النقاط :

$$A\left|\begin{array}{l} x = 1{,}5 \\ y = 7 \end{array}\right. \qquad B\left|\begin{array}{l} x = 1{,}125 \\ y = 6{,}50 \end{array}\right. \qquad C\left|\begin{array}{l} x = 1{,}370 \\ y = 7{,}46 \end{array}\right.$$

1- أثر الإحلال
$$\begin{cases} X_C - X_A = -0{,}13 \\ Y_C - Y_A = +0{,}46 \end{cases}$$

2- أثر الدخل
$$\begin{cases} X_B - X_C = -0{,}245 \\ Y_B - Y_C = -0{,}96 \end{cases}$$

3- الأثر العام = مجموع الأثرين

$$X_B - X_A = -0{,}375 = -0{,}130 - 0{,}245$$
$$Y_B - Y_A = -0{,}500 = 0{,}46 - 0{,}96$$

حساب المرونتين :

$$y = \frac{R}{2p_y} - \frac{p_x}{4p_y} + 2 \qquad x = \frac{R}{2p_x} - \frac{2p_y}{p_x} + \frac{1}{4}$$

$$e_{R_y} = \frac{1}{2p_y} \cdot \frac{R}{y} = \frac{11}{14} \langle 1 \quad \text{(inélastique)}$$

$$e_{R_x} = \frac{1}{2p_x} \cdot \frac{R}{x} = \frac{11}{8} \rangle 1 \quad \text{(demande élastique)}$$

$$\left.\begin{aligned} e_{x/p_x} &= \left(\frac{-R}{2p_x^2} + \frac{2p_x}{p_x^2}\right)\frac{p_x}{x} = -\frac{7}{8} & e\langle 1 \\ e_{y/p_y} &= \left(\frac{-R}{2p_x^2} + \frac{p_x}{4p_y^2}\right)\frac{p_y}{y} = -\frac{9}{14} & e\langle 1 \end{aligned}\right\} \textit{demande inélastique}$$

2- لدينا دالة إنتاج شركة من الشكل $Q = 2K^{1/4}L^{1/2}$

أ) أحسب درجة تجانس هذه الدالة

ب) أرسم منحنى الدالة عندما $Q = 16$

ج) أحسب منحنيات الطلب على العاملين رأس المال K والعمل L.

د) أحسب الكميات K و L في الحالتين التاليتين :

الحالة الأولى : $Q=16 \quad p_K=1 \quad p_L=1$

الحالة الثانية : $Q=16 \quad p_K=1 \quad p_L=2$

هـــ) نفترض أن أسعار عوامل الإنتاج هي : $p_K=p_L=1$ ، أحسب دوال النفقة.

الحل

أ) هذه الدالة متجانسة من الدرجة $k=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

ب) $16=2K^{1/4}L^{1/2} \Rightarrow 8=K^{1/4}L^{1/2}$

$$\frac{8}{L^{1/2}}=K^{1/4} \Rightarrow \frac{8^4}{L^2}=K$$

ج) يجب أن نقلل من نفقات الإنتاج

تحت قيد دالة الإنتاج

$$V=Kp_K+Lp_L+\lambda\left(Q-2K^{1/4}L^{1/2}\right)$$

نعدم المشتقات الجزئية الأولى

$$\frac{\partial V}{\partial K}=p_K-\frac{\lambda}{4}\left(2K^{-3/4}L^{1/2}\right)=0 \Rightarrow \lambda=\frac{2p_K\cdot K^{3/4}}{L^{1/2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial L}=p_L-\frac{\lambda}{2}\left(2K^{1/4}L^{-1/2}\right)=0 \Rightarrow \lambda=\frac{p_L\cdot L^{1/2}}{K^{1/4}}$$

نعادل ما بينهما للتخلص من المعامل λ فنحصل على :

$$p_LK^{3/4}L^{-1/2}=2p_KK^{-1/4}L^{1/2} \Rightarrow 2Kp_K=Lp_L$$

نعوض في دالة القيد K بـــ L فنحصل على :

$$Q=\frac{2p_L^{1/4}}{p_K^{1/4}}L^{1/4}L^{1/2} \Rightarrow L^{3/4}=\frac{Q}{2}\cdot\frac{p_K^{1/4}}{p_L^{1/4}}$$

$$L = \frac{Q^{4/3}}{2} \frac{p_K^{1/3}}{p_L^{1/3}} \qquad K = \frac{Q^{4/3}}{4} \cdot \frac{p_L^{2/3}}{p_K^{2/3}}$$

يمكن الوصول إلى نفس النتيجة بمعادلة الميل الحدي للإحلال بأسعار عوامل الإنتاج.

$$K = \frac{Q^4}{2} \cdot \frac{1}{L^2}$$

$$TMS_{K/L} = \frac{-\partial K}{\partial L} = \frac{-2Q^4}{2L^{-3}} = \frac{p_K}{p_L} \Rightarrow 2Kp_K = Lp_L$$

نحصل على أفضل الكميات من عوامل الإنتاج K و L عندما نعادل الإنتاجية الحدية لكل عامل مع سعر هذا العامل فنحصل على :

$$\frac{PMK}{P_K} = \frac{PML}{P_L} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} K^{-3/4} L^{1/2}}{P_K} = \frac{K^{1/4} L^{-1/2}}{P_L} \Rightarrow 2P_K \cdot K = P_L \cdot L$$

نعوض K و L بالقيد فنحصل على :

$$L = \frac{Q^{4/3}}{2} \left(\frac{p_K}{p_L} \right)^{1/3} \qquad K = \frac{Q^{4/3}}{4} \left(\frac{p_L}{p_K} \right)^{2/3}$$

الحالة الأولى : $Q = 16$ $\quad p_K = p_L = 1$ إذن :

$$K = 10{,}8 \qquad L = 20{,}16$$

الحالة الثانية : $Q = 16$ $\quad p_K = 1$ $\quad p_L = 2$ نجد :

$$K = L = 16$$

حساب نفقات الإنتاج :

$$CT = KP_K + LP_L \;\; avec \;\; P_K = P_L = 1$$

$$L = \frac{Q^{4/3}}{2}\left(\frac{p_K}{p_L}\right)^{1/3} = \frac{Q^{4/3}}{2}$$

$$K = \frac{Q^{4/3}}{4}\left(\frac{p_L}{p_K}\right)^{2/3} = \frac{Q^{4/3}}{4}$$

$$CT = \frac{3}{4}Q^{4/3}$$

$$CM_0 = \frac{CT}{Q} = \frac{3}{4}Q^{1/3}$$

$$CM_a = (CT)' = Q^{1/3}$$

تمرين رقم 3 : إنتاج سلعة ما يتم عن طريق 300 شركة لها نفس النفقة الكلية $CT = 3q^2 - 2q + 3$

أما الطلب فيتكون من طلبات 1000 مستهلك لديه نفس دالة الطلب $D = 40/P$.

1- أحسب سعر التوازن في السوق.

2- أحسب عدد الشركات بحيث أن الربح ينعدم في الأمد الطويل.

الحل

الطلب العام يتكون من طلبات الألف مستهلك $D = \frac{4000}{P}$

العرض العام يتكون من عرض 300 شركة.

عرض كل مشروع نحصل عليه عندما نقارن السعر بالنفقة الحدية

$$CT = 3q^2 - 2q + 3$$

$$CM_a = 6q - 2 = p \Rightarrow 6q = p + 2 \Rightarrow q = \frac{p+2}{6}$$

العرض العام = عرض 300 شركة $O = 50P + 100$.

نساوي العرض العام مع الطلب العام فنحصل على :

$$O = D \Rightarrow 50P + 100 = \frac{4000}{P} \Rightarrow 50P^2 + 100P - 40000 = 0$$

جذور المعادلة هي : $q = 1465$ $P = 27{,}3$

بما أن كل المستهلكين لديهم نفس الكمية المطلوبة إذن :

$$O = \frac{1465}{300} = 4{,}88 \qquad D = \frac{1465}{1000} = 1{,}465$$

كل منتج يحقق ربحا قدره $\pi = RT - CT = pq - (3q^2 - 2q + 3)$

نعوض $q = 4{,}88$ و $p = 1{,}465$

فنحصل على الربح الإجمالي لكل مشروع $\boxed{\pi = 68{,}5}$

إن وجود ربح يحفز مشاريع جديدة للدخول في هذا الميدان مما يؤدي إلى زيادة العرض العام وانخفاض سعر التوازن.

2- ينعدم الربح عندما يعادل سعر السلعة الحد الأدنى للنفقة المتوسطة

$$CT = 3Q^2 - 2Q + 3$$

$$CM_0 = 3Q - 2 + \frac{3}{Q}$$

نعدم مشتق النفقة المتوسطة :

$$(CM_0)' = 0 \Rightarrow 3 - \frac{3}{Q^2} = 0 \Rightarrow q = 1 \quad CM_0 = 4$$

إذن سعر التوازن يصبح $p = 4$ ، الطلب العام لا يتغير $D = \frac{40000}{p}$.

بما أن السعر $p = 4$ إذن عدد المستهلكين $\frac{40000}{4} = 10000$ كل مستهلك يحصل على 10 وحدات من السلعة بدلا من 1,46 وحدة. في التوازن نجد $O = D$ العرض = الطلب.

كل مشروع ينتج وحدة واحدة عندما السعر $p = 4$ عدد المشاريع سوف يرتفع إلى 10000 مشروع.

تمرين رقم 4 : شركة تميز ما بين 3 أنواع من الطلبات وهي :

$$Q_1 = 46,67 - \frac{1}{6} P_1$$

$$Q_2 = 72,86 - \frac{1}{7} P_2$$

$$Q_3 = 80 - \frac{1}{4} P_3$$

لدينا أيضا دالة النفقة الكلية $CT = Q^2 - 30Q + 75$ ، $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

نحسب P_3, P_2, P_1 بدلالة الكميات :

$$\begin{cases} P_1 = 280 - 6Q_1 \\ P_2 = 510 - 7Q_2 \\ P_3 = 640 - 8Q_3 \end{cases}$$

ومنه نستخلص الإيرادات الكلية :

$$\left. \begin{aligned} RT_1 &= P_1Q_1 = 280Q_1 - 6Q_1^2 \\ RT_2 &= P_2Q_2 = 510Q_2 - 7Q_2^2 \\ RT_3 &= P_3Q_3 = 640Q_3 - 8Q_3^2 \end{aligned} \right\}$$

نحسب الإيراد الحدي :

$$\left. \begin{aligned} RM_1 &= 280 - 12Q_1 = 160 \\ RM_2 &= 510 - 14Q_2 = 160 \\ RM_3 &= 640 - 16Q_3 = 160 \end{aligned} \right\}$$

النفقة الحدية : $CM_a = 30 + 2Q = 30 + 2Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3$

نعادل ما بين الإيراد الحدي والنفقة الحدية في كل سوق فنحصل على :

$$\left.\begin{array}{l} 250 - 14Q_1 - 2Q_2 - 2Q_3 = 0 \\ 480 - 2Q_1 - 16Q_2 - 2Q_3 = 0 \\ 610 - 2Q_1 - 2Q_2 - 18Q_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Q_1 = 10 \\ Q_2 = 25 \\ Q_3 = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P_1 = 220 \\ P_2 = 335 \\ P_3 = 400 \end{array}$$

نحسب المرونات الثلاث :

$$e_1 = -\frac{1}{6}\left(\frac{220}{10}\right) = -3{,}67$$

$$e_2 = -\frac{1}{7}\left(\frac{335}{25}\right) = -1{,}91$$

$$e_3 = -\frac{1}{8}\left(\frac{400}{30}\right) = -1{,}67$$

يمكن الحصول على نفس النتيجة إذا علمنا بأن :

$$RM_{a_1} = P_1\left(1 + \frac{1}{e_1}\right) = 220\left(1 - \frac{1}{3{,}67}\right) = 160$$

نفس الشيء بالنسبة

$$RM_{a_2} = P_2\left(1 + \frac{1}{e_2}\right)$$

$$RM_{a_3} = P_3\left(1 + \frac{1}{e_3}\right)$$

2- محتكر يواجه طلبين للسلعتين (x, y)

بالنسبة للسلعة الأولى : $x = 72 - 0{,}5p_x$

بالنسبة للسلعة الثانية : $y = 120 - p_y$

دالة النفقة الكلية : $CT = x^2 - xy + y^2 + 35$

أما حجم الإنتاج فلا يمكن أن يتجاوز $\boxed{x + y = 40}$ قيد contraint.

أحسب أسعار السلع والكميات ومعدل الربح الإجمالي.

الحل

دالة الطلب على السلعة الأولى : $p_x = 144 - 2x$

دالة الطلب على السلعة الثانية : $p_y = 120 - y$

دالة الربح = $\pi = (144 - 2x)x + (120 - y)y - (x^2 + xy + y^2 - 35) =$

$$\pi = 144x - 3x^2 - xy - 2y^2 + 120y - 35$$

نشكل صيغة Lagrange لاغرانج فنحصل على :

$$V = 144x - 3x^2 - xy - 2y^2 + 120y - 35 + \lambda(x + y - 40)$$

نحسب المشتقات الجزئية الأولى

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 144 - 6x - y + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -x - 4y + 120 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial \lambda} = x + y - 40 = 0 \end{cases}$$

حل جملة ثلاث معادلات لثلاث مجاهيل يعطينا :

$y = 22$ $\quad x = 18$

$p_y = 98$ $\quad p_x = 108$

$$\boxed{\pi = 2861}$$

المطلوب : حساب حجم إنتاج q وسعر p وربح محتكر π يواجه طلبين :

الأول : $x = 50 - \frac{1}{2} p_x$

الثاني : $y = 76 - p_y$

دالة النفقة الكلية : $CT = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 55$

الحل

نحسب في دوال الطلب السعر بدلالة الكمية x و y فنحصل على :

$$P_x = 100 - 2x \qquad P_y = 76 - y$$

دالة الربح هي من الشكل : $\pi = xp_x + yp_y - CT$

$$\pi = x(100-2x) + y(76-p_y) - (3x^2 + 2xy + 2y^2 + 25)$$

$$\pi = 100x - 5x^2 + 76y - 3y^2 - 2xy - 55$$

لتعظيم هذه الدالة نعدم المشتقات الجزئية الأولى فنحصل على :

$$\begin{cases} \pi_x = 100 - 10x - 2y = 0 \\ \pi_y = 76 - 6y - 2x = 0 \end{cases}$$

بحل جملة المعادلتين لمجهولين نحصل على :

$$\bar{x} = 8 \text{ et } \bar{y} = 10 \Rightarrow \pi = 725$$

لمعرفة ما إذا كان هذا الربح يمثل الحد الأقصى أو الأدنى نحسب المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية فنحصل على :

$$\left.\begin{array}{l} \pi_{xx} = -10 \\ \pi_{yy} = -6 \\ \pi_{xy} = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \pi_{xx} \cdot \pi_{yy} \rangle \pi_{xy} \\ 60 \rangle -2 \end{array}$$ بما أن الجداء.

إذن الربح π يمثل حد أقصى. $p_y = 66 \qquad p_x = 84$

تمرين رقم 5 :

لدينا دالة الاستهلاك : $C = 0{,}5y + 50$

لدينا دالة الاستثمار : $I = 2500(0{,}05 - i)$

بحيث أن i تمثل معدل الفائدة. y تمثل الدخل القومي

لدينا عرض النقود = $\$\overline{M}125$.

أما الطلب على النقود : $D = 0{,}5y + 2500(0{,}04 - i)$

- ما هو شرط التوازن العام. أحسب معدل الفائدة ومقدار الدخل القومي ؟

- في هذه الدولة الاستخدام مرتبط بالدخل القومي بالعلاقة $y = N^2 - N - 10$

بحيث أن N يمثل عدد العمال في المناجم. في هذا البلد $N = 18$ مليون عامل.

ما هو معدل الدخل القومي المقابل للاستخدام الكامل لليد العاملة ؟

- أحسب معدل الاستثمار اللازم للوصول إلى مستوى الدخل القومي والذي يسمح بالاستخدام الكامل لليد العاملة ؟

- ما أثر ذلك على معدل الفائدة وكذلك على الكمية المطلوبة من النقود ؟

- ما هو معدل البطالة المقابل لدخل قومي يساوي $y = 200$ ؟

- ما هو معدل البطالة عندما يكون الدخل القومي في وضع التوازن العام ؟

الحل

الدخل القومي = الاستثمار + الاستهلاك $y = 0{,}5y + 50 + 2500(0{,}05 - i)$

$$y = 350 - 5000i \qquad (1)$$

يتحدد سعر الفائدة في سوق النقد عند تعادل العرض والطلب على النقود.

$$125 = 0{,}5y + 2500(0{,}04 - i)$$

$$y = 50 + 5000i \qquad (2)$$

نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين : المعادلة الأولى تعطينا التوازن في سوق السلع.

المعادلة الثانية تعطينا التوازن في سوق النقد.

$$\begin{cases} y = 350 - 5000i \\ y = 50 + 5000i \end{cases}$$

بحلهما نحصل على معدل الدخل القومي ويساوي $y = 200$ ومعدل الفائدة :

$i = 3\%$

إذا كان في وضع الاستخدام الكامل $N = 18$ فهذا يستلزم بعد تعويض N بقيمتها في دالة الدخل القومي، نحصل على قيمة الدخل القومي ويساوي 296.

بما أن الدخل القومي في حالة التوازن العام = $y = 200$ إذن هناك قلة استخدام لعوامل الإنتاج (العمل) إذن هناك خسارة تقدر : $296 - 200 = 96$ مليار دولار، وهذا يتطلب زيادة في الاستثمار. لحساب مضاعف الاستثمار لابد من أن نحسب الميل الحدي للاستهلاك. في مثلنا هذا : الميل = $0{,}5 = \frac{\Delta C}{\Delta R}$

إذن مضاعف الاستثمار = $2 = \frac{1}{1 - \frac{\Delta C}{\Delta r}} = k$

$$\Delta R = k \Delta I \Rightarrow \Delta I = \frac{\Delta R}{k} = \Delta R \frac{96}{2} = 48 \overline{M} \$$$

لابد من زيادة حجم الاستثمارات بمقدار 48 مليار دولار.

دالة الاستثمار : $I = 2500(0{,}05 - i)$

في وضع التوازن العام معدل الفائدة = $i = 3\%$ إذن قيمة الاستثمار = $I = 50$.

أما في وضع الاستخدام الكامل فلابد من رفع معدل الاستثمار حتى يصل إلى $50 + 48 = \$98$.

أما معدل الفائدة المقابل لهذا الحجم من الاستثمار فهو $i = 1{,}08\%$ إذن لابد للسلطات النقدية (البنك المركزي) من تخفيض معدل الفائدة من 3% حتى هذا المستوى أي $98 = 2500(0{,}05 - i) \Rightarrow i = 1{,}08\%$

الكمية المطلوبة من النقود عند الاستخدام الكامل : معدل الفائدة = $i = 1{,}08\%$ مستوى الدخل القومي = 296 مليار دولار. نعوض في دالة الطلب على النقود فنحصل على :

$$D = 0{,}5(296) + 2500(0.04 - 0.0108) = 221\overline{M}\$$$

إذن الكمية المطلوبة من النقود =221 مليار دولار = D. ما على البنك المركزي إلا أن يزيد من عرض النقود من 125 إلى 221 مليار دولار أي بزيادة قدرها : $221 - 125 = 96$ مليار $.

حساب معدل البطالة : مستوى الدخل القومي في التوازن العام = 200 مليار $ = y.

نعوض ذلك في الدالة : $200 = y = N^2 - N - 10$

ومنها نحصل على : $N = 15$. لكن اليد العاملة = 18 مليون، إذن هناك 3 ملايين عاطل عن العمل يشكلوا نسبة $\frac{3 \times 100}{18} = 16{,}6$ أي $\frac{1}{6}$ من اليد العاملة.

التوازن العام

تمرين رقم 1 : من الجدول التالي الخاص بالاستهلاك C والدخل R استخلص دالة الاستهلاك. نفترض أن الاستثمار $I = 100$

- أحسب دالة الطلب العام DG
- أحسب قيمة الدخل القومي في وضع التوازن
- أحسب دالة الادخار
- أحسب مضاعف الاستثمار

C	R
250	150
300	300
350	450
400	600
500	900

الحل

دالة الاستهلاك هي من الشكل التالي : $C = aR + b$ بحيث أن (a, b) هي ثوابت يجب تحديدها من الجدول.

نفترض أن هذه الدالة هي معادلة مستقيم تمر بالنقطتين $A(300,300)$ و $B(400,600)$ ، إذن نحصل على المعادلتين :

$$\begin{cases} 300 = 300a + b \\ 400 = 600a + b \end{cases}$$

بحلهما نحصل على : $C = \frac{1}{3}R + 200$

$$\begin{cases} 100 = 300a \Rightarrow a = \frac{1}{3} \\ 300 = 100 + b \Rightarrow b = 200 \end{cases}$$

دالة الطلب العام هي من الشكل التالي : $R = C + I$

أي أن الدخل القومي يساوي مجموع الطلب على السلع الاستهلاكية والإنتاجية. نعوض فنحصل على :

$$R = \frac{1}{3}R + 200 + 100$$

$$\frac{2}{3}R = 300 \Rightarrow R_e = 450$$

دالة الادخار تساوي الدخل − نفقات الاستثمار

$$S = R - C = R - \frac{1}{3}R - 200 = \frac{2}{3}R - 200$$

في حالة التوازن : الاستثمار = الادخار

$$I = S \Rightarrow \frac{2}{3}R - 200 = 100 \Rightarrow \frac{2}{3}R = 300 \Rightarrow R_e = 450$$

مضاعف الاستثمار $k = \frac{1}{1 - \frac{\Delta C}{\Delta R}}$ بحيث أن $\frac{\Delta C}{\Delta R}$ تمثل الميل الحدي للاستهلاك.

حسب الجدول نأخذ النقطتين الأخيرتين :

$$500 - 400 = 100 = \Delta C \quad \text{et} \quad \Delta R = 900 - 600 = 300$$

إذن $\frac{\Delta C}{\Delta R} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$ إذن مضاعف الاستثمار $k = \frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$.

تمرين رقم 2 : لدينا دالة الاستهلاك : $C = 90 + 0{,}625R$ وكذلك دالة الاستثمار $I = 150 - 100i$ بحيث أن i يمثل معدل الفائدة لدينا أيضا الطلب على النقود ويتكون من شقين : الطلب من أجل المضاربة $M_S = 50 - 200i$ والطلب من أجل المعاملات $M_T = \frac{1}{4}R$ وأخيرا لدينا عرض النقود $O = 180$

السؤال : أحسب التوازن العام في كل من السوقين : السلع والنقود.

الحل

التوازن في سوق السلع : الدخل = نفقات الاستهلاك + الاستثمار

إذن : $R = C + I = 90 + 0,625 + 150 - 100i$

منحنى IS $0,375R + 100i = 240 \quad (I)$

التوازن في سوق النقود : عرض النقود = الطلب على النقود بشقيه

منحنى LM $180 = \frac{1}{4}R + 50 - 200i \Rightarrow \frac{1}{4}R - 200i = 130 \quad (II)$

نحصل على التوازن العام جبريا وبيانيا

جبريا بحل جملة المعادلتين II و I

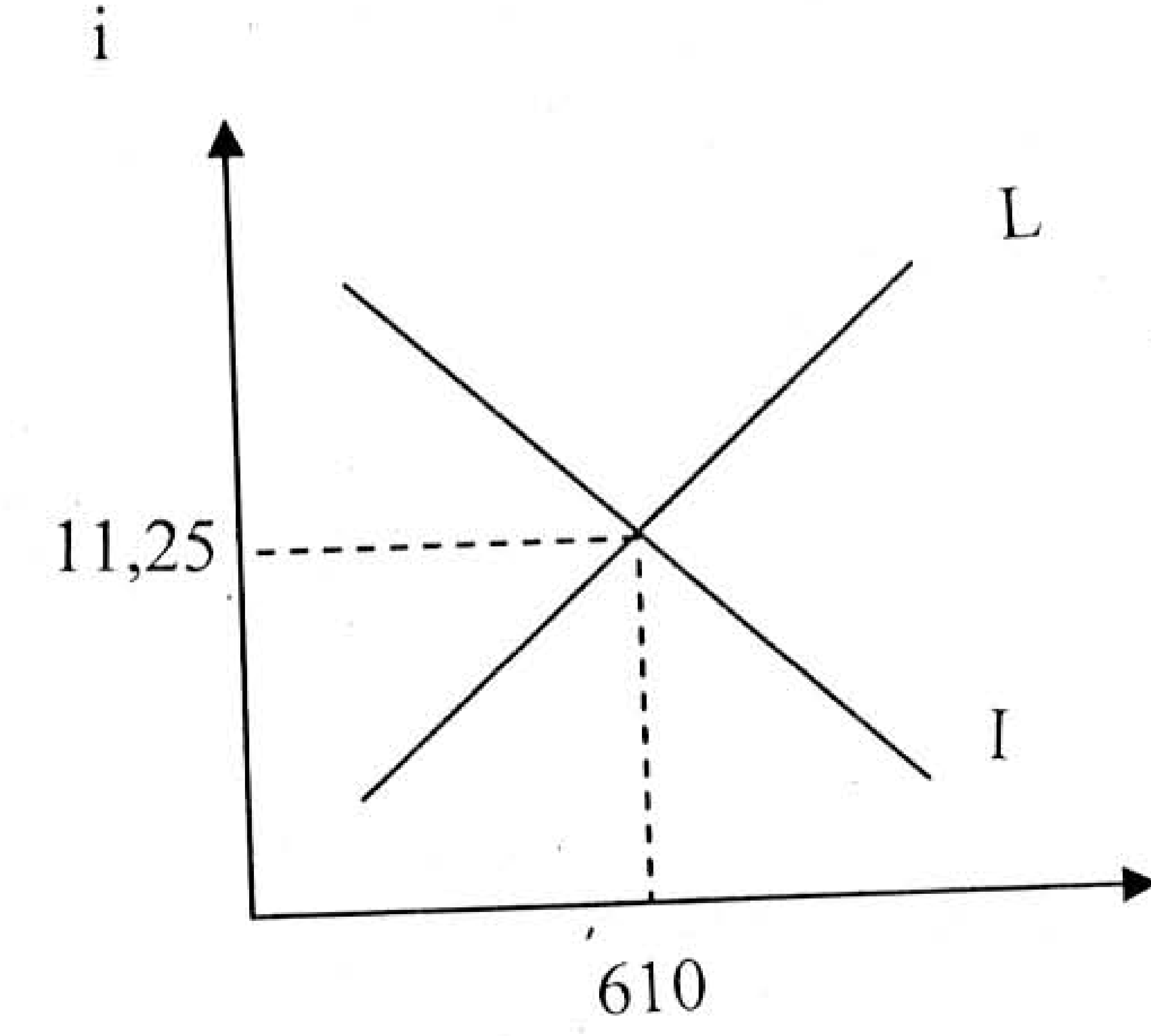
فنحصل على دخل التوازن $R_e = 610$

ومعدل الفائدة $i = 11,25\%$

بيانيا برسم المنحنيين IS و LM

$M_T = 152,5 \qquad M_S = 27,5$

$C = 471,25 \qquad I = 138,75$



تمرين رقم 3 :لدينا العناصر التالية والخاصة باقتصاد ودولة ما.

دالة الاستهلاك $C = \frac{3}{4}y + 175$

دالة الاستثمار $I = -20\tau + 400$

دالة الطلب على النقود لأجل المبادلات $L_1 = 0,4y$

لأجل المضاربة $L_2 = -20\tau + 400$

لدينا عرض النقود $Mo = 800$

الأسئلة :

1- حدد معادلات المستقيمين IS و LM وأحسب قيمة دخل التوازن y_e ومعدل الفائدة τ، الخطوط البيانية.

2- نريد أن يزيد الدخل القومي بمقدار $\Delta y = 400$ باتباع :

أ- سياسة مالية G
ب- سياسة نقدية M

هناك حالتان :

الأولى : السياسة المالية (G>0 M=0)

الثانية : السياسة النقدية (G=0 M>0)

أحسب قيمة G و τ في الحالة الأولى وM و τ في الحالة الثانية.

الحل

معادلة المستقيم IS عندما نحصل على التوازن في سوق السلع

$$Y = C + I = \frac{3}{4}y + 175 - 20\tau + 400$$

$$Y = -80\tau + 2300 \quad (IS)$$

معادلة المستقيم LM عندما نحصل على التوازن في السوق النقدي

$$800 = 0,4y - 20\tau + 400 \qquad O_M = D_M = L_1 + L_2$$

$$Y = 50\tau + 1000 \quad (LM)$$

إن التوازن العام يفترض التعادل في السوقين نحن أمام جملة معادلتين لمجهولين :

$$50\tau + 1000 = -80\tau + 2300$$

$$130\tau = 1300 \Rightarrow \tau = 10\% \qquad y_e = 1500$$

الحالة الأولى : $(\Delta M = 0, \Delta G \rangle 0)$

إن التوازن في السوق النقدي لا يتبدل، نستبدل y بقيمتها الجديدة $1500+400 = y = 1900$ في معادلة LM إذن :

$$\tau = \frac{1900-1000}{50} = 18 \quad \text{et} \quad \tau = 18\%$$

لحساب النفقات العامة G نعوض $y = 1900$ ومعدل الفائدة $18 = \tau$ في معادلة IS أي أن : $Y = C + I + G \Rightarrow$

$$\frac{1}{4} y = -20\tau + 575 + G \Rightarrow G = 260$$

إذن معادلة التوازن الجديدة في سوق السلع هي $\frac{1}{4} y = -20\tau + 835$

منحنى IS $\quad Y = -80\tau + 2340$

الحالة الثانية : $(\Delta M \rangle 0; \Delta G = 0)$

في هذه الحالة الدالة IS لا تتبدل نعوض $y = 1900$ في هذه المعادلة فنحصل على : $\tau = 5\%$ إذن $\tau = \frac{2300-1900}{80} = 5$

لحساب الزيادة في الكتلة النقدية ΔM نعوض y و τ بقيمها فنحصل على :

$$800 + \Delta M = L_1 + L_2 = 0{,}4y - 20\tau + 400$$

$$0{,}4y = 20\tau + 400 + \Delta M \Rightarrow \Delta M = 260$$

المعادلة الجديدة للدالة LM هي $0{,}4y = 20\tau + 660$

نحصل على نقطة التوازن عندما (LM) $\quad y = 50\tau + 1650$

$$LM = IS \Rightarrow -80\tau + 3340 = 50\tau + 1650 \Rightarrow \begin{cases} \tau = 13\% \\ y = 2300 \end{cases}$$

تمرين رقم 4 : لدينا المعطيات التالية والخاصة باقتصاد دولة ما.

دالة الاستهلاك $C = 0,9y + 20$

دالة الاستثمار $I = 0,1y - 1200i + 20$

نفقات الدولة $G = 80$

الميزان التجاري $X - M = 480 - 0,3y$

الطلب على النقود $Md = 2y - 4000i$

عرض النقود $Mo = 2800$

السؤال : أرسم منحنى IS و LM واستخرج قيمة R و i.

الحل

المنحنى IS يمثل كافة التوليفات (y,i) والتي تؤدي إلى التوازن في سوق السلع والخدمات $y = C + I + G + (X - M)$

المنحنى LM يمثل كافة التوليفات (y,i) والتي تؤدي إلى التوازن في السوق النقدي حيث يتساوى عرض النقود مع الطلب عليها.

$$y_1 = y - 0,3y + 600 - 1200i$$

منحنى IS $\quad y_1 = 2000 - 4000i$

$$2y_2 - 4000i = 2800$$

منحنى LM $\quad y_2 = 2000i + 1400$

يتقاطع هذان المنحنيان في النقطة $E_0(i = 10\% \quad R = 1600)$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow 2000 - 4000i = 2000i + 1400$$

$$600 = 6000i \Rightarrow i = 10\% \quad R = 1600$$

بالنسبة للميزان التجاري $X - M = 480 - 0,3(1600) = 0$

نلاحظ أنه في حالة توازن أي أن الصادرات =الواردات $M = X$.

<u>السؤال 2</u> : يقوم البنك المركزي بزيادة عرض النقود بمقدار 240، ما أثر هذه الزيادة على الدخل القومي ومعدل الفائدة بالنسبة لمنحنى IS لا يوجد أي تغيير. أما بالنسبة للمنحنى LM فتصبح الدالة الجديدة :

$$2y - 4000i = 3040 = 2800 + 240$$

نقطة التوازن الجديدة هي :

$$\left.\begin{aligned} IS = Y = 1520 + 2000i \\ LM = Y = 2000 - 4000i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} i = 8\% \\ y = 1680 \end{aligned}$$

أما بالنسبة للميزان التجاري $480 - 0{,}3(1680) = -24$

نلاحظ أن السياسة النقدية التي تهدف إلى زيادة كتلة النقود تؤدي إلى انخفاض معدل الفائدة وزيادة الدخل والعجز في الميزان التجاري.

<u>السؤال 3</u> : تزيد الدولة من نفقاتها بمقدار $\Delta G = 72$ ما أثر ذلك على التوازن العام ؟

دالة IS الجديدة تصبح :

$$y = 0{,}9y + 20 + 0{,}1y - 1200i + 20 + (80 + 72) + 480 - 0{,}3y$$
$$\Rightarrow y = 2240 - 4000i$$

أما منحنى LM فلا يتبدل ، ونقطة التوازن الجديدة تصبح :

$$2240 - 4000i = 1400 + 2000i \Rightarrow \begin{cases} i = 14\% \\ R = 1680 \end{cases}$$

أما الميزان التجاري يصبح :

$$X - M = 480 - 0{,}3(1680) = -24$$

إذن السياسة المالية التوسعية تؤدي إلى ارتفاع معدل الفائدة والدخل القومي وإلى العجز في الميزان التجاري.

السؤال 4 : نفترض أن التغير في ميزان رؤوس الأموال نسمي ΔB التغير في الاحتياطي $\Delta A = 300(i - 0{,}1)$.

من العملة الصعبة و الذهب بحيث أن $\Delta B = \Delta A + (X - M)$

ما هي شروط التوازن في كل من سوق السلع و سوق النقود و ميزان المدفوعات

الحل

لكي يتوازن ميزان المدفوعات يجب أن يكون $\Delta B = 0$ أي أن

$$480 - 0{,}3y + 300(i - 1) = 0 \Rightarrow y = 1500 + 1000i$$

لكننا نعلم بأن منحنى IS و LM يتقاطعان في النقطة $E_0 \left| \begin{array}{l} i = 10\% \\ R = 1600 \end{array} \right.$

بالنسبة لميزان المدفوعات إذا أعطينا $i = 10\%$ نجد أن $y = 1600$

إذن المنحنيات الثلاث تتقاطع في النقطة E_0

تمرين رقم 5: لدينا الجدول التالي و الخاص بمرونة الواردات e، الميل الوسطي للواردات $\frac{M}{y}$ والميل الحدي للواردات $\frac{\Delta M}{\Delta R}$

الدول	المرونة e	الميل الوسطي $\frac{M}{y}$	الميل الحدي $\frac{\Delta M}{\Delta R}$
A	1,51	0,048	*
B	1,66	*	0,314
C	*	0,094	0,115
E	*	0,138	0,229
F	1,42	*	0,315
G	1,43	0,073	*

السؤال الأول : إملأ الفراغات

السؤال الثاني: نفترض y الدخل القومي و Mقيمة الواردات

أحسب قيمة الدخل القومي في البلد A إذا كانت M=743

كذلك قيمة الدخل القومي في البلد E و استخلص قيمة المرونة.

السؤال الثالث: أحسب الميل الوسطي في الدولة B

السؤال الرابع: أحسب الميل الحدي في الدولة A

السؤال الخامس: أحسب الميل الحدي في الدولة G

الحـــــــــل

1- في الدولة A : $0{,}048 = \frac{743}{y}$ ومنه نستخلص قيمة الدخل القومي

$$y = 1548$$

2- أما في البلد E : $0{,}138 = \frac{743}{y} \Rightarrow y = 5384$

أحسب قيمة المرونة في الدولة E.

$$e = \frac{\Delta M / M}{\Delta R / R} = \frac{\Delta M / \Delta R}{M / R} = \frac{\text{الميل الحدي للواردات}}{\text{الميل الوسطي للواردات}} = \frac{0{,}229}{0{,}138}$$

$$e = 1{,}66$$

2- احسب الميل الوسطي للواردات في الدولة B: $\frac{M}{R} = \frac{\Delta M / \Delta R}{e}$

$$\frac{M}{R} = \frac{0{,}314}{1{,}66} = 0{,}189 = \frac{M}{R}$$

3- أحسب الميل الحدي في البلد A: $\frac{x}{0{,}048} = 1{,}51$

إذن الميل الحدي للواردات في A: $\frac{\Delta M}{\Delta R} = 0{,}073$

4- أحسب الميل الحدي للواردات في G :

$$e.\frac{M}{R} = \frac{\Delta M}{\Delta R} = e.\frac{M}{R} = 0{,}073(1{,}43) = 0{,}104$$

تمرين رقم 6 : لدينا المعطيات التالية و الخاصة باقتصاد دولة ما

دالة الإستهلاك $C = 0{,}8y + 50$

دالة الإستثمار $I = 750 - 20\tau$

دالة الصادرات $X = 900 - 30\pi$

دالة الواردات $M = 100 + 0{,}2y + 10\pi$

عرض النقود $O = 1250$

الطلب على النقود $L = 0{,}5y - 25\tau$

التغير في ميزان المدفوعات $K = 50 + 5\tau$

حركة رؤوس الأموال K سعر الصرف π معدل الفائدة : τ

الأسئلة :

1- أحسب الدخل القومي ومعدل الفائدة الناجم عن توازن ميزان المدفوعات

الحـــــل

يتوازن ميزان المدفوعات عندما يكون التغير في الميزان التجاري و التغير في حركة الرؤوس اموال مجموعها يساوي الصفر $(X - M) + K = 0$

$$900 - 30\pi - 100 - 0{,}2y - 10\pi + 50 + 5\tau = 0$$

إذن $0{,}2y - 5\tau = 850 - 40\pi$

2- نفترض سعر الصرف $\pi = 5$ أحسب توازن الدخل القومي و معدل الفائدة

الحل

في سوق السلع :

$$y = C + I + (X - M) =$$
$$0{,}8y + 50 + 750 - 20\tau + 900 - 30\pi - 100 - 0{,}12y - 10\pi \Rightarrow$$
$$0{,}4y + 20\tau = 1600 - 40\pi = 1400$$

في سوق النقود: العرض= الطلب إذن

التوازن في السوقين يفترض حل جملة المعادلتين لمجهولين

$$\begin{cases} 1250 = 0{,}5y - 25\tau \\ 1400 = 0{,}4y + 20\tau \end{cases}$$

بحلها نحصل على $y = 3000$, $\tau = 10\%$, $X = 750$, $M = 750$

أما التغير في ميزان المدفوعات فهناك فائض قدره $K = 50 + 10\tau = 100$

تمرين رقم 7 : لدينا المعطيات التالية:

سوق السلع:

$$\left.\begin{array}{c} C = 150 + 0{,}75y_D \\ T = 400 \\ G = 400 \\ I = 400 - 15\tau \end{array}\right\}$$

سوق النقد:

$$\left.\begin{array}{c} L = 0{,}5y - 20\tau \\ O = 800 \end{array}\right\}$$

الدخل الجاهز $Y_D = y - T$

1 - أحسب الدخل القومي في حالة التوازن كذلك معدل الفائدة

تمارين غير محلولة

1- لدينا دالتي العرض والطلب التاليتين

$$P = 2 + \frac{Q^2}{16} \quad et \quad P = 75(1+Q)^{-2}$$

نفترض أن سعر التوازن $P_e = 3$ احسب فائض المستهلك والمنتج؟

2- لدينا دالة العرض والطلب

$$Q_0 = (50 + 5P)\sqrt{3+2P}$$

$$Q_D = \frac{(350 - P - 4P^2)}{\sqrt{3+2P}}$$

احسب سعر وكمية التوازن؟

احسب مرونة العرض والطلب عند نقطة التوازن؟

3- لدينا دالة الطلب $q^2 = \frac{50 - P^2}{2+P} + pq$

المطلوب حساب مرونة الطلب عند النقطة P=2؟

4- لدينا دالة الطلب $4P + Q - 16 = 0$

ودالة النفقة المتوسطة $CM_0 = \frac{4}{Q} + 2 - \frac{1}{3}Q + \frac{5}{100}Q^2$

المطلوب

حساب مستوى الإنتاج الذي:

أ) يعظم الايراد الكلي

ب) يدني التكلفة المتوسطة

ت) يعظم الأرباح

5- منتج يتحمل تكلفة حدية وايراد حدي

$$CMa = 200 - 0{,}4x$$

$$RMa = 200 + 0{,}2x$$

- أوجد التغير في الايراد الناتج عن زيادة مستوى المبيعات من 10 إلى 50 وحدة
- أوجد الايراد الناتج عن بيع 70 وحدة
- إذا كانت التكلفة الثابتة CF=1000DA أوجد تكلفة 70 وحدة
- أوجد الربح الكلي الناجم عن بيع 70 وحدة.

المصادر باللغة العربية

1- الاقتصاد الرياضي : أحمد الأشقر – جامعة حلب.

2- الاقتصاد الرياضي : هناء خير الدين – دار الجامعات المصرية.

3- مبادئ الاقتصاد الرياضي : عمر صخري – ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر.

4- الرياضيات الاقتصادية : عبد القادر أفندي – جامعة حلب.

5- النظرية الاقتصادية : نعمة الله نجيب – مؤسسة شباب الجامعة، الاسكندرية.

6- اصول الاقتصاد الرياضي : محمد علي الليثي – دار الجامعات المصرية.

المصادر باللغة الفرنسية

1- BERREBI : Maths – Exercices corrigés, Dunod, 3 T.
2- BOUZITAT : Maths. Librairie Day, 2 T.
3- GUILBAUD : Maths. Coll. Thémis.
4- GUITTON : Analyse Econ., Exercices. Coll. Cujas.
5- LECAILLON : Analyse Micro-Econ., Coll. Cujas.
6- R. PASSET : Maths Appliquées à l'Econ., Cujas.
7- PERCHERON : Micro-Econ., Exercices corrigés, Masson.
8- Encyclopédie auto-didactique, Quillet, T.3.
9- Math économistes: série Schaum.

انجز طبعه على مطابع
ديوان المطبوعات الجامعية
المطبعة الجهوية بوهران
الهاتف: 29-85-39-041
الفاكس:49-02-39-041